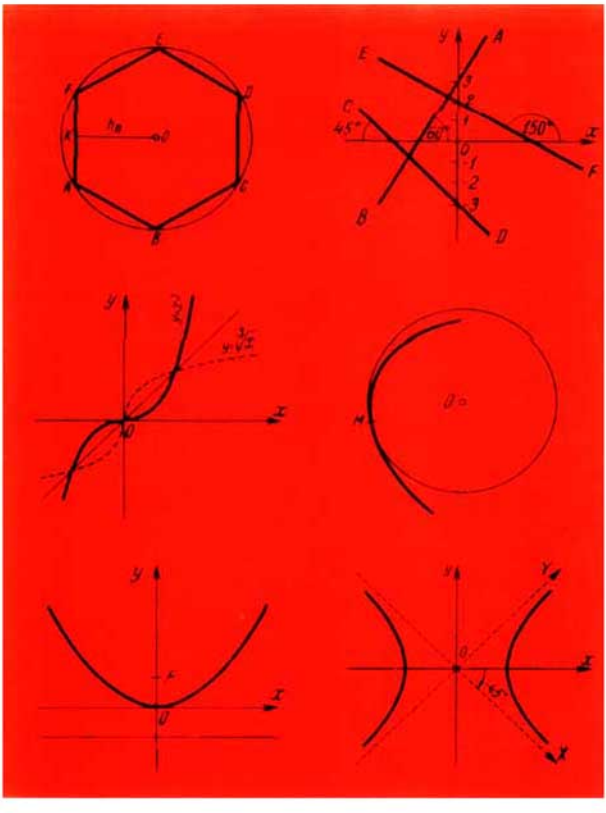
Editorial Mir Moscú



I. L. Záitsev Elementos de matemáticas superiores

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

И. Л. Зайцев
Элементы
высшей
математики
•
Издательство
„Наука“
Москва

I. L. Záitsev
Elementos de matemáticas superiores

Editorial Mir Moscú

TRADUCIDO DEL RUSO POR MARTA GONZÁLEZ GILL

© Traducción al español. Editorial Mir. 1977

Impreso en la República Socialista de Rumania 1977

На испанском языке

Indice

•

Elementos de geometría analítica en el plano

Capítulo I. Método de coordenadas

§ 1. Objeto de la geometría analítica (9). § 2. Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el plano (9). § 3. Distancia entre dos puntos (12). § 4. División del segmento en la razón dada (14).

Capítulo II. Líneas y sus ecuaciones

§ 5. Magnitudes constantes y variables (19). § 6. Dependencia funcional (19). § 7. Líneas y sus ecuaciones (21). § 8. Fórmulas de transformación de las coordenadas rectangulares (25).

Capítulo III. Línea recta

§ 9. Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes de coordenadas (29) § 10. Ecuación de los ejes de coordenadas (30). § 11. Ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas (31). § 12. Ecuación de la recta con coeficiente angular y ordenada inicial (ecuación explícita) (34). § 13. Ecuación general de la recta (37). § 14. Forma segmentaria de la ecuación de la recta (42). § 15. Ecuación del haz de rectas (44). § 16. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados (46). § 17. Angulo entre dos rectas (49). § 18. Condición de paralelismo de las rectas (52). § 19. Condición de perpendicularidad de las rectas (54. § 20. Intersección de rectas (56).

Capítulo IV. Curvas de segundo grado

§ 21. La circunferencia y su ecuación (63). § 22. Ecuación de la circunferencia, como forma particular de la ecuación general de segundo grado (65). § 23. La elipse y su ecuación (69). § 24. In-

vestigación de la ecuación de la elipse (72) § 25. Excentricidad de la elipse (75). § 26. Relación entre una elipse y una circunferencia (77). § 27. La hipérbola y su ecuación (79). § 28. Investigación de la ecuación de la hipérbola (81). § 29. Excentricidad de la hipérbola (84). § 30. Asíntotas de la hipérbola (84). § 31. Hipérbolas conjugadas (88). § 32. Hipérbola equilátera (89). § 33. Ecuación de la hipérbola equilátera referida a las asíntotas (89). § 34. La parábola y su ecuación canónica (92). § 35. Investigación de la ecuación de la parábola (94). § 36. Ecuación de la parábola con vértice desplazado (98). § 37. Secciones cónicas (107).

Elementos de cálculo diferencial y de cálculo integral

Capítulo V. Teoría de los límites

§ 38. Magnitud absoluta y correlaciones vinculadas a ella (112). § 39. Sucesión. Carácter de la variación de una variable (114). § 40. Magnitud infinitesimal (116). § 41. Magnitud infinitamente grande (119). § 42. Relación entre la magnitud infinitesimal y la infinitamente grande (121). § 43. Concepto de límite de una variable (122). § 44. Propiedades de las magnitudes infinitesimales (125). § 45. Teoremas de los límites (127). § 46. Aplicación de la teoría de los límites al cálculo de la longitud de la circunferencia, el área del círculo y la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente indefinida (131). § 47. Límite de una función (141). § 48. Límite de la relación $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ cuando $x \to 0$ (148). § 49. Magnitudes infinitesimales equivalentes (149). § 50. Límite de la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n \to \infty$ (151). § 51. Logaritmos naturales (152).

Capítulo VI. La función y sus propiedades elementales

§ 52. Símbolos de la dependencia funcional (154). § 53. Valores de la función. Dominio de la función (155). § 54. Representación geométrica de las funciones (156). § 55. Incremento de la función (158). § 56. Representación geométrica de los incrementos del argumento y de la función (161). § 57. Continuidad de la función (162). § 58. Propiedad de la función continua (166). § 59. Tipos de funciones (167).

Capítulo VII. Derivada de la función

§ 60. El movimiento uniforme y su velocidad (170). § 61. El movimiento variado y su velocidad (171). § 62. Velocidad de variación de la función (173). § 63. La derivada de la función (175).

§ 64. Relación entre la diferenciabilidad de la función y su continuidad (178). § 65. La tangente (178). § 66. Concepto geométrico de la derivada (179).

Capítulo VIII. Fórmulas de diferenciación

§ 67. Derivada de una constante (183). § 68. Derivada de la función $y = x$ (184). § 69. Derivada de una suma algebraica de varias funciones (184). § 70. Derivada del producto de dos funciones (185). § 71. Derivada del producto de una constante por una función (187). § 72. Derivada del cociente (187). § 73. Concepto de función compuesta (188). § 74. Derivada de la potencia con exponente entero positivo (189). § 75. Derivada de la función $y = \sqrt{u}$ (191). § 76. Derivada de la función $y = \frac{1}{u}$ (191). § 77. Aplicación de las fórmulas de diferenciación (192). § 78. Derivadas de las funciones trigonométricas (198). § 79. Derivada de la función logarítmica (204). § 80. Derivada de la potencia con cualquier exponente (209). § 81. Derivadas de las funciones exponenciales (209). § 82. Derivadas de las funciones ciclométricas (212). § 83. Derivada de la función implícita (215). § 84. Derivada de segundo orden (217). § 85. Concepto mecánico de la segunda derivada (218).

Capítulo IX. Análisis de las funciones por sus derivadas

§ 86. Crecimiento y decrecimiento de la función (224). § 87. Caracteres de crecimiento y decrecimiento de la función (225). § 88. Máximo y mínimo de la función (227). § 89. Caracteres del máximo y del mínimo de la función (227). § 90. Primera regla de determinación del máximo y del mínimo de la función (230). § 91. Convexidad y concavidad de la curva (234). § 92. Caracteres de convexidad y concavidad de las curvas (236). § 93. Determinación del punto de inflexión (237). § 94. Segunda regla de determinación del máximo y del mínimo de la función (239). § 95. Problemas de la determinación del máximo y del mínimo de la función (242). § 96. Construcción de los gráficos de las funciones (248).

Capítulo X. La diferencial

§ 97. Comparación de magnitudes infinitesimales entre sí (251). Concepto de diferencial (251). § 98. Representación geométrica de la diferencial (256). § 99. Diferencial de segundo orden (257). § 100. Aplicación de la diferencial a cálculos aproximados (258). § 101. Curvatura de la curva (263). § 102. Curvatura de la circunferencia (266). § 103. Radio de curvatura de la curva (267).

Capítulo XI. La integral

§ 104. Concepto de integral indefinida (269). § 105. Propiedades fundamentales de la integral indefinida (271). § 106. Fórmulas fundamentales de integración (272). § 107. Determinación de la constante de integración (276). § 108. Integración por sustitución (278). § 109. Integral definida (287). § 110. Propiedades fundamentales de la integral definida (289). § 111. Aplicación del método de sustitución para el cálculo de la integral definida (291). § 112.

Concepto geométrico de la integral definida (295). § 113. La integral definida, como límite de la suma (298).

Capítulo XII. Aplicación de la integral

§ 114. Areas de figuras (301). § 115. Volumen de cuerpos (304). §116. Volumen de un cuerpo de revolución (307). § 117. Superficie de la esfera y de sus partes (316). § 118. Espacio recorrido por un cuerpo (319). § 119. Trabajo de una fuerza (321). § 120. Trabajo realizado al levantar una carga (326). § 121. Presión de un líquido (331).

Capítulo XIII. Ecuaciones diferenciales

§ 122. Nociones generales (336). § 123. Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separadas (337). § 124. Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden (344). § 125. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (347). § 126. Ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ (350). § 127. Ecuaciones diferenciales homogéneas lineales de segundo orden con coeficientes constantes (354).

Suplemento

Capítulo XIV. Series

§ 128. Concepto de las series (363). § 129. Condición necesaria de convergencia de una serie (364). § 130. Condiciones suficientes de convergencia de una serie (366). § 131. Criterio de convergencia de las series alternantes (370). § 132. Series absolutamente convergentes (372). § 133. Series funcionales (373). § 134. Series potenciales (374). § 135. Serie de Maclaurin (376). § 136. Ejemplos de descomposición de funciones en una serie (377). § 137. Aplicación de las series potenciales a los cálculos aproximados (381). § 138. Series con términos complejos (382). § 139. Fórmulas de Euler (384).

Capítulo XV. Análisis armónico

§ 140. Gráficos de las funciones de la forma $y = A \operatorname{sen} \omega x$ (386). § 141. Oscilaciones armónicas (387). § 142. Series trigonométricas (391). § 143. Coeficientes de Fourier. Serie de Fourier (393). § 144. Posibilidad de descomponer una función no periódica en serie de Fourier (394). § 145. Condición de Dirichlet. Teorema de Dirichlet (396). § 146. Integración por partes (397). § 147. Ejemplos de descomposición de funciones en una serie de Fourier (399). § 148. Series de Fourier para funciones pares e impares (404).

Respuestas a los ejercicios (414).

Elementos de geometría analítica en el plano

•

Capítulo I
Método de coordenadas

§ 1. **Objeto de la geometría analítica.** La geometría analítica estudia las propiedades de las formas geométricas (líneas, figuras, cuerpos, superficies, etc.) mediante un método especial denominado *método de coordenadas*. Además, se aplica ampliamente el álgebra. También en geometría elemental se recurre a veces a métodos algebraicos como, por ejemplo, al determinar el área de un triángulo por los tres lados o al calcular el lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia, etc. Sin embargo, el dominio de la aplicación de métodos algebraicos a la geometría ha devenido más extenso desde que se introdujo el método de coordenadas, el cual no sólo hizo factible el estudio de la forma y las dimensiones de las formas geométricas, sino también su posición en el plano o en el espacio.

Aquí se ofrecerá únicamente un relato elemental sobre geometría analítica en el plano.

§ 2. **Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el plano.** Tomemos, en el plano, dos rectas perpendiculares entre sí Ox y Oy (fig. 1) y un punto cualquiera M. Tracemos desde el mismo MN y MP perpendiculares a Oy y Ox. Eli-

jamos cualquier segmento unidad y midamos con él los segmentos NM y PM. Obtendremos los números

$$x = NM = OP,$$
$$y = PM = ON.$$

Estos números x e y que determinan la posición del punto M respecto a las rectas dadas Ox y Oy, se denominan *coordenadas* del punto M. Generalmente, se anotan entre paréntesis junto a la designación del punto, $M(x; y)$; además, primero se escribe la coordenada x y después la y.

Sea, por ejemplo, $x = OP = 1$ e $y = ON = 2$ unidades de esa misma escala. Entonces se dice que el punto M tiene las coordenadas $M(1; 2)$.

No obstante, se impone la pregunta de si existirán o no en el plano más puntos con las mismas coordenadas que M. En la fig. 2 se muestra que cada uno de los puntos M, M_1, M_2 y M_3 está distanciado de la recta Oy 1 unidad de la escala y de la recta Ox 2 unidades de la escala. Se obtiene la incertidumbre siguiente: cuatro puntos poseen iguales coordenadas (1; 2). Para eliminar esta deficiencia, precisemos la definición de coordenadas rectangulares de los puntos en el plano.

Se llama coordenada x del punto M al número cuya magnitud absoluta es la distancia del punto M a la recta Oy. Este número es positivo si M se encuentra a la derecha de Oy, y negativo si está a su izquierda. La coordenada x se denomina *abscisa*, y la recta Ox, *eje de abscisas*.

Se llama coordenada y del punto M al número cuya magnitud absoluta es la distancia del punto M a la recta Ox. Este número es positivo si el punto está situado en el semiplano superior, y negativo cuando lo está en el inferior. La coordenada y se denomina *ordenada*, y la recta Oy, *eje de ordenadas*.

De esta manera, en la fig. 2, los puntos M, M_1, M_2 y M_3 tienen ya coordenadas diferentes y plenamente definidas: $M(1; 2)$, $M_1(-1; 2)$, $M_2(-1; -2)$ y $M_3(1; -2)$.

Por consiguiente, para determinar la posición de cualquier punto en el plano es necesario dar:

1) dos rectas mutuamente perpendiculares: eje de abscisas Ox y eje de ordenadas Oy, llamados *ejes de coordenadas* (su punto de intersección O se denomina *origen de coordenadas*);

2) el segmento unidad;

3) la dirección de cada uno de los ejes tomada por positiva (en la figura, ésta se señala con flechas).

Así se define *el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares* en el plano (en honor del matemático francés Descartes (1596—1650), creador de la geometría analítica).

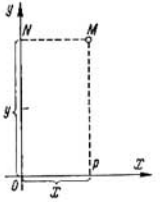


FIG. 1

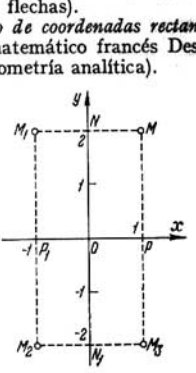


FIG. 2

Como se ha mostrado anteriormente, en este sistema *a todo punto del plano le corresponde un par de números reales* x e y (sus coordenadas), que determinan la posición del punto en el plano, y, viceversa, *a todo par de números reales* x e y *le corresponde un punto en el plano*. A consecuencia de la citada correspondencia entre los puntos y las coordenadas de estos puntos, se dice: "dado el punto $M(a; b)$" en lugar de "dadas las coordenadas del punto M" y "hallar el punto $M(x; y)$" en vez de "hallar las coordenadas del punto M".

Ejercicios

1. Construir los puntos: $A(3; 5)$, $B(-3; 4)$, $C(5; -1)$, $D(-2; -4)$, $E(0; 2)$, $F(3; 0)$, $K(-3; 0)$, $L(0; -4)$, $O(0; 0)$.

2. Construir los puntos: $A(2; \sqrt{5})$, $B(-\sqrt{3}; \sqrt{7})$.

3. Hallar las coordenadas de las proyecciones sobre el eje Ox de los puntos: $A(3; 4)$, $B(-5; -3)$, $C(0; -4)$.

4. Hallar las coordenadas de las proyecciones sobre el eje Oy de los puntos: $A(2; 3)$, $B(4; -2)$, $C(-5; 0)$.

5. Dado el punto $A(3; 2)$. Hallar las coordenadas del punto B simétrico al A respecto al eje Ox, y del punto C simétrico al B respecto al eje Oy. Construir estos puntos.

6. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos $A(1; 0)$, $B(0; -4)$, $D(-2; 3)$, $E(-3; -4)$ respecto al origen de coordenadas. Construir estos puntos.

7. Los lados de un rectángulo son iguales a 6 cm y 10 cm. Hallar las coordenadas de sus vértices, tomadas por ejes de coordenadas las rectas paralelas a sus lados y que parten a éstos por la mitad.

8. Dado un cuadrado de lado igual a 8 cm. Tomadas sus diagonales por ejes de coordenadas, hallar las coordenadas de los vértices del cuadrado.

§ 3. Distancia entre dos puntos. Sean dados dos puntos $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ (fig. 3); se requiere hallar la distancia entre ellos. Bajemos desde A y B las perpendiculares AA_1 y BB_1 al eje Ox y tracemos $AC \parallel Ox$. Del $\triangle ABC$, por el teorema de Pitágoras hallaremos:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}. \tag{1}$$

Pero, como evidencia la fig. 3,

$$\begin{aligned} AC &= A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1, \\ CB &= B_1B - B_1C = B_1B - A_1A = y_2 - y_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Sustituyendo los valores de AC y CB de la igualdad (2) en la expresión (1) y designando AB por d, obtendremos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

Se puede mostrar que la fórmula (3) es justa para cualquier posición de los puntos A y B en el plano. Sean, por ejemplo, los puntos A y B situados como se indica en la fig. 4. Entonces, como se ve por la misma,

$$\begin{aligned} AC &= AD + DC, \\ CB &= CB_1 + B_1B. \end{aligned} \tag{4}$$

Por cuanto AC y CB son positivos por ser lados de un triángulo, los sumandos de los miembros de la derecha de las igualdades (4) también deben ser positivos. Pero las coordenadas del punto A

$$x_1 < 0 \quad \text{y} \quad y_1 < 0;$$

en consecuencia,

$$AD = -x_1 \quad \text{y} \quad CB_1 = -y_1.$$

Por otra parte,

$$DC = x_2 \quad \text{y} \quad B_1B = y_2.$$

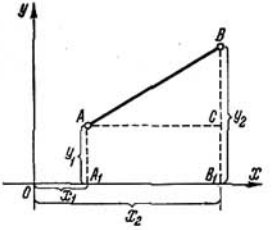


FIG. 3

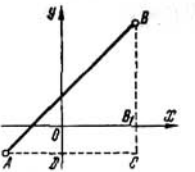


FIG. 4

Así pues,

$$AC = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1,$$

$$CB = -y_1 + y_2 = y_2 - y_1.$$

Luego de sustituidos AC y CB en la igualdad (1) por sus valores, obtendremos la fórmula (3).

EJEMPLO. Hallar la distancia entre los puntos $A(-3; 5)$ y $B(1; 2)$.

SOLUCION. Según los datos $x_1 = -3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 1$, $y_2 = 2$. Sustituyendo estas coordenadas en la fórmula (3), obtendremos:

$$AB = \sqrt{[1-(-3)]^2 + (2-5)^2} =$$

$$= \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

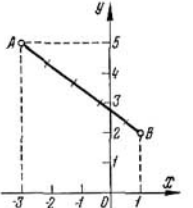


FIG. 5

Resolvamos este ejemplo gráficamente. Para ello, construyamos los puntos dados A y B (fig. 5) y, midiendo el segmento AB, tendremos $AB = 5$.

La distancia del origen de coordenadas $O(0; 0)$ a cualquier otro punto $M(x; y)$ se calcula por la fórmula

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (5)$$

Ejercicios

1. Hallar la distancia del punto $M(6; -8)$ al origen de coordenadas.
2. Hallar la distancia entre los puntos: 1) $A(14; 12)$ y $B(8; 4)$, 2) $M(-2; 4)$ y $N(2; 1)$ y 3) $C(0; 4)$ y $D(3; 0)$.
3. Hallar, por vía analítica y gráfica, la longitud del segmento que une los puntos $A(-10; -10)$ y $B(2; -1)$.
4. El punto $A(-1; -3)$ se desplazó en línea recta al punto $B(4; 2)$. ¿Qué tamaño tiene el camino recorrido y qué ángulo forma la trayectoria del punto A con la dirección positiva del eje Ox?
5. Hallar la longitud de los lados de un triángulo con vértices $A(3; 2)$, $B(-1; -1)$ y $C(11; 6)$.
6. Mostrar que el triángulo con vértices $A(-5; 2)$, $B(3; 6)$ y $C(4; -6)$ es isósceles.
7. Mostrar que el triángulo con vértices $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ y $C(-1; 4)$ es rectángulo.
8. Hallar, en el eje Ox, el punto A alejado 10 unidades del punto $B(4; 6)$. Explicar mediante gráfico por qué se obtienen dos soluciones.
9. Verificar, analítica y gráficamente, si están en una misma recta los tres puntos dados:

1) $A(0; 5)$, $B(2; 1)$ y $C(-1; 7)$;

2) $M(0; 2)$, $N(-1; 5)$ y $P(3; 4)$.

10. Dados dos vértices $O(0; 0)$ y $A(2\sqrt{3}; 0)$ de un triángulo equilátero, hallar el tercero.
11. Hallar el punto equidistante de los puntos $O(0; 0)$, $A(-4; 0)$ y $B(0; 8)$.
12. Hallar el centro de la circunferencia que pasa por el punto $A(-3; 3)$ y es tangente al eje Ox en el punto $B(4; 0)$.
13. Hallar, en el eje Oy, el punto equidistante de los puntos $A(10; 8)$ y $B(-6; 4)$.
14. Hallar el punto distanciado 10 unidades del eje Ox y del punto $A(-5; 2)$.
15. Hallar el punto equidistante de los ejes de coordenadas y del punto $A(1; 2)$.

§ 4. División del segmento en la razón dada. Sean los puntos dados $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ (Fig. 6). Hallar el punto $M(x; y)$ que divide el segmento AB en la razón:

$$AM : MB = m : n^{*)}$$

Desde los puntos A, M y B bajemos AA_1, MM_1 y BB_1 perpendiculares al eje Ox y tracemos las rectas $AC \parallel Ox$ y

*) El punto M se encuentra dentro del segmento AB si la razón $m : n$ es positiva. Cuando $m : n$ es negativa, el punto M está situado en la continuación del segmento AB [véase Привалов И. И. Аналитическая геометрия, Физматгиз, 1962, cap. I, § 6. (I. Priválov. Geometría analítica)].

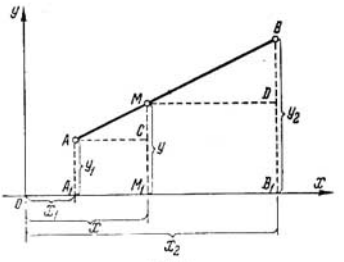


FIG. 6

$MD \| Ox$. Como los triángulos AMC y MBD son semejantes, tendremos:

$$\frac{AC}{MD} = \frac{CM}{DB} = \frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Pero

$$\left.\begin{aligned} AC &= A_1M_1 = OM_1 - OA_1 = x - x_1, \\ MD &= M_1B_1 = OB_1 - OM_1 = x_2 - x, \\ CM &= M_1M - M_1C = M_1M - A_1A = y - y_1, \\ DB &= B_1B - B_1D = B_1B - M_1M = y_2 - y. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1), obtendremos:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}. \tag{3}$$

Para abreviar supongamos $\frac{m}{n} = \lambda$. Entonces, de la igualdad (3) obtendremos dos ecuaciones:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \tag{4}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda. \tag{5}$$

Despejando x e y de las ecuaciones (4) y (5), tendremos:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \text{ *)}. \tag{6}$$

Las fórmulas (6) sirven para determinar las coordenadas del punto $M(x; y)$ que divide en la razón $m: n = \lambda$ el segmento comprendido entre los puntos $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$.

Puede mostrarse que las fórmulas (6) son justas para cualquier posición de los puntos A y B en el plano.

En el caso particular de división del segmento AB por la mitad, es decir, en la razón 1:1, tendremos $\lambda = 1:1 = 1$ y, por ello, las coordenadas del centro del segmento serán:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

Si en las fórmulas (6) λ se sustituye por la razón $\frac{m}{n}$, obtendremos:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} \tag{8}$$

Las fórmulas (8) se emplean frecuentemente en mecánica para determinar la posición del centro de gravedad de un cuerpo homogéneo o para hallar el centro de fuerzas paralelas.

EJEMPLO. Dados los puntos $A(7; 4)$ y $B(10; -2)$. El punto M parte el segmento AB en la razón $AM: MB = 0{,}2$. Hallar el punto M.

SOLUCION. Según los datos $x_1 = 7$, $y_1 = 4$, $x_2 = 10$, $y_2 = -2$, $\lambda = 0{,}2$. Sustituyendo estos datos en la fórmula (6), hallaremos:

$$x = \frac{7 + 0{,}2 \cdot 10}{1 + 0{,}2} = \frac{9}{1{,}2} = 7{,}5,$$

$$y = \frac{4 + 0{,}2(-2)}{1 + 0{,}2} = \frac{3{,}6}{1{,}2} = 3.$$

Así, pues, el punto buscado será $M(7{,}5; 3)$.

Resolvamos este mismo ejemplo por vía gráfica. Para ello construyamos los puntos A y B (fig. 7) y dividamos el

*) Como los puntos A y B no coinciden, $\lambda \neq -1$.

segmento AB en seis partes iguales. Marquemos una de tales partes desde el punto A y obtendremos el punto M que precisamente dividirá AB en la razón $1:5=0{,}2$. Mi-

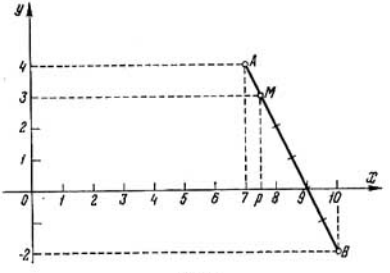


FIG. 7

diendo los segmentos OP y PM, hallaremos las coordenadas del punto M:

$$OP = x = 7{,}5; \quad PM = y = 3.$$

Ejercicios

1. Determinar las coordenadas del centro del segmento que une los puntos A y B: 1) $A(3;\ 5)$ y $B(7;\ 9)$, 2) $A(0;\ -12)$ y $B(8;\ 0)$.

2. Dadas las coordenadas de los cuatro vértices de un paralelogramo: $A(-1;\ -1)$, $B(1;\ 1)$, $C(2;\ -1)$ y $D(0;\ -3)$, hallar la longitud de las diagonales AC y BD, así como el punto de su intersección.

3. Dadas las coordenadas de los tres vértices del triángulo ABC: $A(3;\ 7)$, $B(5;\ 2)$ y $C(-1;\ 3)$, hallar la longitud de la mediana trazada desde B.

4. Hallar el extremo B del segmento AB si se dan su otro extremo $A(7;\ -4)$ y el centro $C(-1;\ 3)$.

5. El centro de gravedad de una barra homogénea se encuentra en el punto $M(5;\ 1)$; uno de sus extremos coincide con el punto $A(-1;\ -3)$. Hallar la posición del otro extremo.

6. Hallar los vértices de un triángulo, conociendo los centros de sus lados: $P(3;\ -2)$, $Q(1;\ 6)$ y $R(-4;\ 2)$.

7. Dados dos vértices adyacentes de un paralelogramo $A(4;\ 2)$ y $B(5;\ 7)$ y el punto de intersección de las diagonales $M(0{,}5;\ 3)$, hallar sus demás vértices.

8. En el segmento que une los puntos $A(6;\ 4)$ y $B(1;\ 9)$ está el punto M que parte dicho segmento en la razón $AM : MB = 2 : 3$. Hallar el punto M. Dar las soluciones analítica y gráfica.

9. Hallar los puntos que dividen en tres partes iguales el segmento comprendido entre los puntos $M(-3; -7)$ y $N(10; 2)$.

10. El punto $C(-2; 1)$ parte el segmento AB en la razón $AC : CB = 2$. Hallar las coordenadas del punto B si $A(10; 5)$.

11. Se ha trazado un segmento del punto $A(1; -1)$ al punto $B(-4; 5)$. ¿Hasta qué punto debe prolongarse en esa misma dirección para que su longitud se triplique?

12. Se dan los vértices de un triángulo: $A(1; 5)$, $B(4; 1)$ y $C(13; 10)$. Hallar el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con el lado BC.

13. En el punto $A(2; 5)$ se concentra una masa de 2 kg, en el punto $B(12; 0)$, de 3 kg. Hallar el centro de estas masas.

14. En los puntos $A(7; 1,5)$, $B(6; 7)$ y $C(2; 4)$ se han colocado cargas de 60 g, 100 g y 40 g, respectivamente. Hallar el centro de gravedad de este sistema.

15. Hallar las coordenadas del punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de sus vértices son: $A(1; 4)$, $B(-5; 0)$ y $C(-2; -1)$.

16. Dados los vértices $A(4; -2)$, $B(1; 5)$ y $C(-2; 0)$ de una placa homogénea triangular, hallar el centro de gravedad de la misma.

17. Hallar el centro de gravedad de una placa homogénea triangular cuyos vértices se encuentran en los puntos $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ y $C(x_3; y_3)$.

18. El centro de gravedad de un triángulo coincide con el origen de coordenadas; uno de los vértices está en el eje Ox a cinco unidades de distancia del origen de coordenadas, y el segundo vértice, en el eje Oy a 10 unidades del origen. Hallar las coordenadas del tercer vértice.

19. Se dan dos vértices de un triángulo ABC: $A(0; 5)$ y $B(5; 3)$ y el punto de intersección de sus medianas $M(1; 3)$. Hallar el tercer vértice

Capítulo II
Líneas y sus ecuaciones

§ 5. **Magnitudes constantes y variables.** En la actividad práctica y en técnica, al investigar un proceso cualquiera tropezamos con magnitudes de dos géneros: constantes y variables.

Se considera *magnitud constante* aquella que no cambia su valor en el curso de un proceso cualquiera. La longitud del radio de una misma circunferencia y la temperatura de ebullición del agua pura a presión constante son ejemplos de magnitudes constantes.

Las magnitudes variables cambian de valor durante el proceso estudiado.

Por ejemplo, el perímetro de un polígono regular inscrito en una circunferencia cuando aumenta el número de lados y la longitud de una barra metálica al calentarla son magnitudes variables.

Con frecuencia ocurre que una misma magnitud es constante en unas condiciones y variable en otras. Por ejemplo, la apotema de un polígono regular inscrito en una circunferencia es una magnitud constante; al duplicar infinitamente el número de lados de este polígono, la apotema se convierte en variable.

§ 6. **Dependencia funcional.** En matemáticas, las variables desempeñan un importante papel, a saber: sirven de medio para el estudio de los fenómenos de la naturaleza y procesos técnicos. En estos casos, las magnitudes variables no se utilizan separadas una de otra, sino en interrelación, en determinada interdependencia. Examinemos el caso de dependencia de dos variables.

Dos magnitudes variables pueden estar interrelacionadas de forma que a cada valor dado de una de ellas le corresponda

un valor totalmente definido de la otra. Tomemos, por ejemplo, la ecuación

$$S = 4{,}9\, t^2, \tag{1}$$

en la que S designa el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre y t, el tiempo de caída. Demos al tiempo t cualquier valor numérico, entonces la magnitud del espacio recorrido S obtendrá el valor correspondiente; por ejemplo,

$$\text{si } t = 2, \quad S = 4{,}9 \cdot 2^2 = 19{,}6,$$

$$\text{si } t = 3, \quad S = 4{,}9 \cdot 3^2 = 44{,}1,$$

$$\text{si } t = 4, \quad S = 4{,}9 \cdot 4^2 = 78{,}4, \text{ etc.}$$

La variable t, a la que dimos cualquier valor, se denomina *variable independiente* o *argumento*. La variable S, que cambia en dependencia de la variación de t, se llama *variable dependiente* o *función*. La relación entre estas dos variables lleva el nombre de *dependencia funcional*.

Debe señalarse que, aunque damos valores arbitrarios al argumento, se escogen sólo los que son admisibles por las condiciones del problema, es decir, se toman únicamente los valores *admisibles* del argumento. Así, en el ejemplo examinado t toma solamente valores positivos o cero, por cuanto, en este caso, el tiempo expresado por un número negativo carece de sentido.

Observemos también que la elección de la variable independiente se dicta por las condiciones del problema. Si, por ejemplo, nos interesa el tiempo invertido por el cuerpo en el recorrido de una u otra distancia, entonces en la ecuación (1) debemos dar a S valores numéricos a los cuales corresponderán determinados valores de t. Con esta condición, S será el argumento y t la función. En tal caso y para calcular con mayor comodidad la función t, la ecuación (1) debe transcribirse así:

$$t = \sqrt{\frac{S}{4{,}9}}.$$

DEFINICIÓN. *La variable y se denomina función de la variable x si a cada valor admisible de x le corresponde un solo valor de y.*

EJEMPLO 1. El área del círculo es

$$S = \pi r^2.$$

En esta igualdad, a cada valor de r le corresponde determinado valor de S; por consiguiente, el área del círculo es función del radio, y la propia igualdad expresa la dependencia funcional entre estas variables.

EJEMPLO 2. El espacio recorrido por un cuerpo en movimiento rectilíneo a velocidad constante v es

$$S = vt.$$

Aquí el espacio S obtiene determinado valor correspondiente al valor de t; por lo tanto, S es función del tiempo t.

EJEMPLO 3. De acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte, la presión p y el volumen v de un gas están relacionados por la fórmula

$$p = \frac{c}{v},$$

donde c es constante para la masa y temperatura dadas del gas. Al variar el volumen v, varía también la presión p; por consiguiente, la presión p de un gas es función de su volumen v.

§ 7. Líneas y sus ecuaciones. Del curso de álgebra se sabe que por la ecuación que define la función puede construirse una línea llamada *gráfico de la función*.

Por ejemplo, sea dada la ecuación $y = x^2$ que define y en función de x.

Confeccionemos la tabla de algunos valores de x y los correspondientes de y:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

A cada par de valores de x e y obtenido en esta tabla le corresponde un punto en el plano. Construyendo estos puntos (fig. 8) y uniéndolos por una línea suave, obten-

dremos el gráfico de la función $y = x^2$. Como se ve, este gráfico define una línea todos los puntos de la cual poseen una misma propiedad, a saber: la ordenada de cada uno de ellos es igual al cuadrado de la abscisa respectiva.

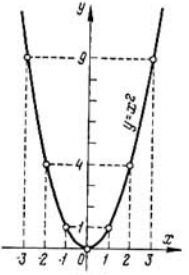


FIG. 8

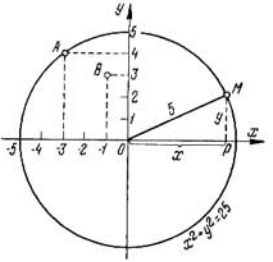


FIG. 9

El conjunto de todos los puntos del plano que poseen una misma propiedad se llama *lugar geométrico de los puntos*.

Nuestro ejemplo muestra que *a una ecuación de variables x e y le corresponde en el plano cierta línea como lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación*. Los problemas de construcción de gráficos de funciones pueden considerarse como ejemplos del problema general consistente en hallar la línea que corresponde a la ecuación dada.

Con frecuencia se impone resolver el problema inverso: por una línea dada en el plano, hallar la ecuación de variables x e y que le corresponde.

Por ejemplo, sea dada en el plano una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a cinco (fig. 9). Del curso elemental de geometría se sabe que esta circunferencia es el lugar geométrico de los puntos distantes del centro cinco unidades. Tomemos un punto cualquiera $M(x; y)$ en la circunferencia. Por las condiciones, $OM = 5$; por otra parte, según la fórmula (5) de § 3

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por consiguiente, para todo punto de nuestra circunferencia se debe verificar

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5,$$

ó

$$x^2 + y^2 = 25. \qquad (1)$$

Así, pues, a una circunferencia con radio igual a 5 y centro en el origen de coordenadas le corresponde la ecuación (1).

La ecuación (1) define totalmente la circunferencia dada y, por esto, se llama *ecuación de esta circunferencia.*

Teniendo la ecuación (1) de la circunferencia, puede establecerse si se hallan en ella cualesquiera puntos como, por ejemplo, $A(-3; 4)$ y $B(-1; 3)$. Para ello, es necesario verificar si las coordenadas de los puntos A y B satisfacen la ecuación (1). Sustituyendo valores en esta ecuación, obtendremos:
para el punto A:

$$(-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

para el punto B:

$$(-1)^2 + 3^2 = 1 + 9 \neq 25.$$

Las coordenadas del punto A satisfacen la ecuación (1), luego el punto A se halla en la circunferencia dada; en cambio, las coordenadas del punto B no satisfacen dicha ecuación, por lo tanto B no está en esta circunferencia (véase la fig. 9).

DEFINICIÓN. *Ecuación de la línea se llama la ecuación de variables x e y a la que satisfacen las coordenadas de cualquier punto de esta línea y no satisfacen las coordenadas de cualquier punto que no se halle en la línea dada.*

De esta manera, hemos establecido que entre las líneas y sus ecuaciones existe una relación, por lo que se dice:
"dada la línea" en lugar de "dada la ecuación de la línea" y
"hallar la línea" en vez de "hallar la ecuación de la línea".

La citada relación entre las líneas y sus ecuaciones permite estudiar las propiedades de las primeras mediante el

análisis de las segundas. De aquí el nombre de la materia que nos ocupa: *geometría analítica*.

EJEMPLO 1. ¿Se halla el punto $A(-2; 4)$ en la línea $y = x^2$?

SOLUCIÓN. Sustituyendo x e y por las coordenadas del punto $A(-2; 4)$ en la ecuación dada, obtendremos la identidad:

$$4 = (-2)^2 = 4.$$

Por consiguiente, A se halla en la línea dada.

EJEMPLO 2. Dada la línea $y = -3x + 1$ y el punto A en ella con abscisa -1. Hallar la ordenada de A.

SOLUCIÓN. Por cuanto el punto A se halla en la línea dada, todas sus coordenadas deben satisfacer la ecuación dada. Una coordenada $x = -1$. Para hallar la segunda, es decir, y, sustituimos, en la ecuación x por su valor. Obtendremos:

$$y = -3(-1) + 1 = 4.$$

Así, pues, la ordenada del punto A es igual a 4.

Ejercicios

1. Dada la línea $y = 1/2\ x + 2$. Establecer si los puntos $A(2; 3)$, $B(3; 3)$ y $C(4; 4)$ se hallan en ella.

2. Los puntos $A(2; y)$ y $B(x; 4)$ se hallan en la línea $4x - 5y = 8$. Hallar la coordenada incógnita de cada punto.

3. Hallar la ecuación de la línea todos los puntos de la cual equidistan de los ejes de coordenadas. Construir esta línea.

4. Las ordenadas de cualquier punto de cierta línea son el cuádruple de sus abscisas. Escribir la ecuación de esta línea y construirla.

5. Escribir la ecuación de la línea todos los puntos de la cual equidistan 2 unidades del punto $O(0; 0)$. ¿Qué forma tiene esta línea?

6. Escribir la ecuación de la línea todos los puntos de la cual equidistan 4 del punto $M(2; -3)$.

7. Los puntos de cierta línea equidistan de dos puntos $A(-2; 1)$ y $B(-1; -3)$. Escribir la ecuación de esta línea.

8. Escribir la ecuación de la línea por la cual se desplaza el punto $M(x; y)$ de forma que su distancia hasta el eje Ox permanece siempre igual a su distancia hasta el punto $F(0; -2)$.

9. Determinar la trayectoria del punto $M(x; y)$ que al desplazarse se mantiene a una distancia del punto $A(1; 0)$ igual a la mitad de la que le separa del punto $B(4; 0)$.

§ 8. Fórmulas de transformación de las coordenadas rectangulares.

1. *Traslado paralelo de los ejes de coordenadas.* Sea el punto M dado en el sistema de coordenadas rectangulares xOy (fig. 10). Si se traslada el origen O de este sistema a otro punto O_1 $(a;\ b)$, conservando el sentido de los ejes, entonces obtendremos un nuevo sistema de coordenadas $XO_1\ Y$ con respecto al cual el punto M tendrá otras coordenadas. Hallemos la relación entre las coordenadas del punto M en el sistema anterior xOy y en el nuevo $XO_1\ Y$.

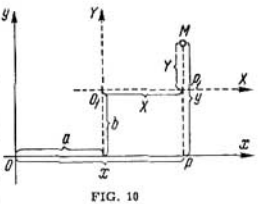


FIG. 10

De la fig. 10, tenemos:

$$x = OP = QP + OQ = O_1P_1 + OQ = X + a,$$

$$y = PM = P_1M + PP_1 = P_1M + QO_1 = Y + b.$$

Así, pues,

$$\left.\begin{aligned} x &= X + a, \\ y &= Y + b. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned} X &= x - a, \\ Y &= y - b. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Las fórmulas (1) sirven para hallar las coordenadas de un punto en el antiguo sistema xOy por las coordenadas de este punto en el nuevo sistema $XO_1\ Y$, y las fórmulas (2), para calcular las coordenadas del punto en el nuevo sistema por sus coordenadas en el antiguo. Estas fórmulas son justas para cualquier posición de los puntos O_1 y M en el plano.

Si se toma la ecuación de cualquier línea con respecto al sistema de coordenadas xOy, entonces, en caso de traslado paralelo de los ejes Ox y Oy variarán no sólo las coordenadas de todo punto de esta línea, sino también su ecuación. Sea, por ejemplo, $y = 2x^2 - 4x$ la ecuación de una línea con relación al sistema de coordenadas xOy. Trasla-

demos el origen O al punto O_1 $(1; -2)$, conservando la dirección inicial de los ejes. Utilizando las fórmulas (1), obtendremos:

$$Y - 2 = 2(X + 1)^2 - 4(X + 1) =$$

$$= 2X^2 + 4X + 2 - 4X - 4,$$

de donde

$$Y = 2X^2 \text{ (en el nuevo sistema } XO_1\ Y).$$

Como se evidencia en este ejemplo, el traslado paralelo de los ejes de coordenadas ha cambiado (y hasta ha simplificado) la ecuación de la línea. No obstante, es necesario observar que tal simplificación es factible sólo con ciertos valores *numéricos de a y b en las fórmulas* (1), elegidos para ello.

II. *Giro de los ejes de coordenadas.* Tomemos en el sistema xOy (fig. 11) el punto M con coordenadas

$$x = OP \quad \text{e} \quad y = PM.$$

Giremos el sistema de coordenadas alrededor del origen en un ángulo α. Este ángulo α tiene valor positivo si se ha formado girando los ejes en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y negativo, en el mismo sentido. Como resultado del giro de los ejes se obtendrá un nuevo sistema de coordenadas XOY, con relación al cual el punto M tiene las coordenadas

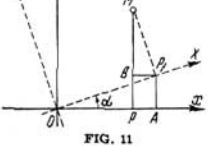


FIG. 11

$$X = OP_1 \quad \text{e} \quad Y = P_1M.$$

Hallemos la correlación entre las coordenadas del punto M en los sistemas antiguo y nuevo. Tracemos las rectas

$$P_1B \parallel Ox \quad \text{y} \quad P_1A \perp Ox.$$

Tomando en cuenta que

$$\sphericalangle BMP_1 = \sphericalangle P_1OA = \alpha$$

como ángulos formados por dos lados perpendiculares, tenemos de la fig. 11:

$$x = OP = OA - PA = OA - BP_1 =$$

$$= OP_1 \cos \alpha - P_1M \operatorname{sen} \alpha = X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha.$$

$$y = PM = BM + PB = BM + AP_1 = P_1M \cos \alpha +$$

$$+ OP_1 \operatorname{sen} \alpha = Y \cos \alpha + X \operatorname{sen} \alpha = X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha.$$

Así, pues,

$$\left.\begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha, \\ y &= X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Tales son las fórmulas que permiten hallar las antiguas coordenadas de un punto, conociendo las nuevas. Despejando X e Y en el sistema de ecuaciones (3), obtendremos las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} X &= x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha, \\ Y &= -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mediante las cuales se hallan las nuevas coordenadas de un punto por antiguas dadas. Dejemos que los alumnos deduzcan las fórmulas (4) por sí solos.

EJEMPLO. Dada la ecuación de una línea

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32.$$

Gírese en 45° el eje de coordenadas y hállese la ecuación de esta línea en el sistema de coordenadas obtenido.

SOLUCIÓN. Apliquemos las fórmulas (3). Simplifiquemos las mismas previamente, suponiendo $\alpha = 45°$; obtendremos:

$$\left.\begin{aligned} x &= X \cos 45° - Y \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y), \\ y &= X \operatorname{sen} 45° + Y \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Sustituyendo en la ecuación dada x e y por sus valores de las igualdades (5), tendremos:

$$5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\right]^2-6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)+$$

$$+5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\right]^2=32.$$

Después de simplificar, hallaremos definitivamente:

$$X^2+4Y^2=16.$$

Como se ve, la ecuación de la línea ha tomado otra forma y, además, más simple. La simplificación ha ocurrido gracias a la elección del ángulo de giro $\alpha=45°$.

Hemos visto que la transformación de las coordenadas permite simplificar las ecuaciones de las líneas.

Capítulo III
Línea recta

§ 9. Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes de coordenadas. Tomemos una recta paralela al eje Oy y que corte en el Ox un segmento de magnitud a (fig. 12).

Todos los puntos de esta recta equidistan del eje de ordenadas. Por consiguiente, todo punto de la recta AM tendrá una misma abscisa, a saber:

$$x = a, \tag{1}$$

y diferentes ordenadas. De esta manera, la ecuación (1) define totalmente una recta paralela al eje Oy y, por ello, es su *ecuación*. Además, si a es positiva, entonces la recta se halla a la derecha del eje Oy, y si es negativa, a la izquierda.

Tomemos una recta paralela al eje Ox y que corte en el Oy un segmento de magnitud b (fig. 13). Todos los puntos

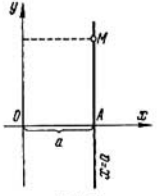


FIG. 12

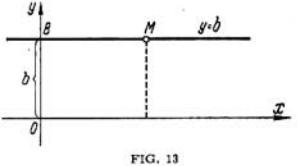


FIG. 13

de esta recta equidistan del eje Ox, es decir, los puntos de la recta BM tienen la ordenada constante

$$y = b, \tag{2}$$

en cambio, las abscisas son diferentes. Como se ve, la ecuación (2) define totalmente una recta paralela al eje Ox y, por ello, es su *ecuación*. Además, si b es positiva, entonces la recta se halla en la parte superior al eje Ox y si es negativa, en la inferior. Por las ecuaciones (1) y (2) pueden construirse las rectas que definen. Por ejemplo, sea una recta dada por la ecuación $x = -4$. Trazando, en el eje Ox, el segmento $OA = -4$ (fig. 14) y, por el punto A, una paralela al eje Oy, obtendremos la recta buscada.

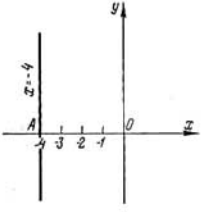


FIG. 14

§ 10. Ecuación de los ejes de coordenadas. Veamos la ecuación

$$x = a$$

de una recta paralela al eje Oy; disminuyamos la magnitud absoluta de a; entonces, la recta definida por esta ecuación se aproximará al eje Oy, permaneciendo siempre paralela al mismo, y cuando $a = 0$ se fundirá con él. La ecuación

$$x = 0$$

es *la ecuación del eje Oy*.

En cambio, si en la ecuación

$$y = b$$

de una recta paralela al eje Ox disminuimos la magnitud absoluta de b, entonces, dicha recta se irá aproximando al eje Ox, permaneciendo paralela al mismo, y cuando $b = 0$ coincidirá con él. De esta forma, la ecuación

$$y = 0$$

será *la ecuación del eje Ox*.

Ejercicios

1. Construir las rectas: 1) $x = 3$, 2) $x = -5$, 3) $y = 3$ y 4) $y = -2$.

2. Escribir la ecuación de una recta paralela al eje Ox, que corte en el Oy un segmento igual a -5.

3. Escribir la ecuación de una recta paralela al eje Oy, que corte en el Ox un segmento igual a -2.

4. Escribir la ecuación de una recta paralela al eje Ox, que corte el eje Oy en el punto $A\ (0; -4)$.

5. Escribir la ecuación de una recta paralela al eje Oy, que corte el Ox en el punto $A(3; 0)$.

6. Una recta paralela al eje Ox pasa por el punto $A(-3; 2)$. Escribir la ecuación de esta recta y construirla.

7. Una recta paralela al eje Oy pasa por $A\ (5; -1)$. Escribir la ecuación de esta recta y construirla.

8. Una recta pasa por el punto $A(4; -6)$, formando con el eje Ox un ángulo $\alpha = 0°$. Escribir la ecuación de esta recta y construirla.

9. Una recta pasa por el punto $A(2; -5)$, formando con el eje Ox un ángulo $\alpha = 90°$. Escribir la ecuación de esta recta y construirla.

10. El lado de un cuadrado es igual a 12. Escribir la ecuación de sus lados si por ejes de coordenadas se toman rectas paralelas a los lados que pasen por el centro del cuadrado.

11. Los lados de un rectángulo, iguales a 6 y 8, coinciden con los ejes de coordenadas. Escribir la ecuación de los lados de ese rectángulo si está situado en el primer ángulo de coordenadas.

§ 11. Ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas. Tracemos una recta por el origen de coordenadas, formando un ángulo α ($\alpha \neq 90°$) con el eje Ox (fig. 15). Se toma por positivo el ángulo α contando desde la dirección positiva del eje de abscisas en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (véase la fig. 15), y negativo, en el mismo sentido de éstas.

Tomemos cualquier punto $M(x; y)$ en la recta trazada. Bajando MP perpendicular al eje Ox, obtendremos el triángulo rectángulo OMP, del cual hallaremos:

$$PM = OP \operatorname{tg} \alpha. \qquad (1)$$

Pero

$$OP = x \text{ y } PM = y,$$

por eso, la igualdad (1) se transcribirá así:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Suponiendo

$$\operatorname{tg} \alpha = k, \qquad (2)$$

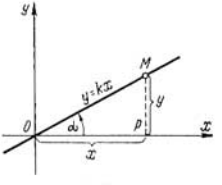


FIG. 15

obtendremos:

$$y = kx. \qquad (3)$$

Las coordenadas de todo punto de la recta OM satisfacen la ecuación obtenida; puede mostrarse que las coordenadas

de todo punto situado fuera de OM no satisfacen dicha ecuación; por lo tanto, la misma será la ecuación de la recta OM. Así, pues,

$$y = kx$$

es *la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas*. El número k se denomina *coeficiente angular*.

DEFINICIÓN. *Coeficiente angular de una recta es la tangente del ángulo que la recta forma con el sentido positivo del eje Ox.*

La magnitud k puede ser tanto positiva como negativa. Si el ángulo α es agudo, entonces su tangente posee valor positivo; si es obtuso, negativo. Por eso, la magnitud k en la ecuación de la recta será positiva si α es un ángulo agudo, y negativa, si obtuso.

Observemos que con $\alpha = 90°$ no existe coeficiente angular, por cuanto tg 90° carece de valor numérico.

Conociendo el coeficiente angular de una recta $y = kx$, puede determinarse su posición.

Sea $y = 2x$ una recta a construir.

Para esto, hallemos el ángulo α por los datos

$$k = \operatorname{tg} \alpha = 2,$$

de donde

$$\alpha = 63°26'.$$

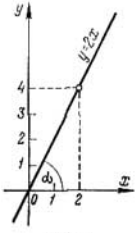


FIG. 16

Tomando el punto O como vértice y construyendo el ángulo hallado, obtendremos la recta buscada (fig. 16).

Esta recta puede construirse también de un modo más sencillo.

Se sabe que la posición de toda recta se define por dos puntos; por este motivo, para resolver el problema es necesario conocer sus coordenadas. En nuestro caso, basta con determinar las coordenadas de un punto, por cuanto las del segundo (origen de coordenadas) ya las sabemos. Para esto, demos cualquier valor a x, por ejemplo, $x = 2$; entonces, de la ecuación de la recta hallaremos:

$$y = 2 \cdot 2 = 4.$$

Los valores $x = 2$ e $y = 4$ serán precisamente coordenadas de un punto de la recta dada. Construido este punto, trazaremos la recta que pasa por él y el origen de coordenadas (véase la fig. 16).

Ejercicios

1. Escribir la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas y forme, con la dirección positiva del eje Ox, uno de los ángulos siguientes: 1) 45°, 2) 30°, 3) 135°, 4) 0° y 5) 180°.

2. Sea $y = kx$ la ecuación de una recta dada. ¿Cuál será la posición de ésta con 1) $k = 0$, 2) $k = 1$, 3) $k = \sqrt{3}$ y 4) $k = -1$?

3. Los lados de un rectángulo, iguales a 4 cm y 5 cm, coinciden con el sentido positivo de los ejes de coordenadas. Escribir la ecuación de la diagonal que parte del origen de coordenadas.

4. ¿Qué ángulo forman las siguientes rectas con la dirección positiva del eje Ox: 1) $y = \sqrt{3}x$, 2) $y = \frac{2}{3}x$ y 3) $y = -2x$?

5. Construir las rectas: 1) $y = 2x$, 2) $y = \frac{1}{2}x$, 3) $y = -2x$ y 4) $y = -\frac{1}{2}x$.

6. Dada la recta $y = 3x$. ¿Hállanse en ella los puntos $A(1; 3)$, $B(2; 5)$ y $C\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$? Verificar gráfica y analíticamente.

7. ¿En cuál de las rectas $y = 4x$, $y = -3x$ e $y = 2x$ se halla el punto $A(-2; -4)$? Dar las soluciones analítica y gráfica.

8. Dada la recta $y = 1{,}5x$ y dos puntos de la misma $A(x; 6)$ y $B(-2; y)$. Hallar las coordenadas incógnitas. Dar las soluciones analítica y gráfica.

9. La recta $y = kx$ pasa por el punto $A(-1; 5)$. Hallar su coeficiente angular.

10. Escribir la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas y el punto $A\ (2; -4)$.

11. El vértice de un triángulo rectángulo isósceles coincide con el origen de coordenadas, y el cateto, igual a 10, con el sentido positivo del eje Ox. Hallar las ecuaciones de los lados del triángulo.

12. El vértice de un triángulo equilátero se halla en el origen de coordenadas, y uno de sus lados coincide con la dirección negativa del eje Ox. Escribir la ecuación de los lados del triángulo que se cortan en el origen de coordenadas.

13. Construir los puntos $A(-6; 0)$ y $B(0; 3)$ y el rectángulo $OACB$. Escribir la ecuación de los lados del rectángulo y de su diagonal OC.

14. Una fuerza está aplicada al origen de coordenadas; sus componentes se hallan en los ejes Ox y Oy y son iguales a 5 y -2, respectivamente. Escribir la ecuación de la recta por la que está dirigida la fuerza y construir dicha recta.

15. El punto A dista del origen de coordenadas 5 unidades; el coeficiente angular de la recta que pasa por el punto A y el origen de coordenadas es igual a $3/4$. Hallar las coordenadas del punto A.

§ 12. Ecuación de la recta con coeficiente angular y ordenada inicial (ecuación explícita). Sea dada una recta AB que corta los ejes de coordenadas en los puntos D y C. Marquemos $OC = b$ y efectuemos el traslado paralelo del eje Ox, colocando el origen de coordenadas en el punto C $(0; b)$. Obtendremos un nuevo sistema de coordenadas XCY (fig. 17), con relación al cual la ecuación de la recta AB tiene la forma

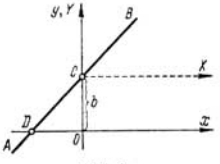


FIG. 17

$$Y = kX. \qquad (1)$$

Pasemos ahora de las nuevas coordenadas X e Y a las antiguas x e y. Para esto, sustituyamos, en la ecuación (1), X e Y por sus valores tomados de las formulas (2) del § 8, en las que se supone $a = 0$. Tendremos

$$y - b = kx,$$

de donde

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

Hemos obtenido la ecuación de la recta AB en el sistema de coordenadas xOy; en esta ecuación k es el coeficiente angular, y b, *la coordenada inicial.*

Cuando $b = 0$ la ecuación (2) se convierte en $y = kx$ que define una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Conociendo los valores k y b en la ecuación $y = kx + b$, es fácil construir la recta correspondiente. Por ejemplo, construyamos la recta dada por la ecuación

$$y = x + 4.$$

De la ecuación dada, tenemos $k = 1$. Por consiguiente, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, de donde $\alpha = 45°$.

Tracemos, por el origen de coordenadas, la recta MN que forma un ángulo de 45° con el sentido positivo del eje Ox (fig. 18).

La recta $y = x + 4$, como evidencia su ecuación, corta el eje Oy a la distancia OC igual a 4 $(b = 4)$. Precisamente por esto, la recta AB, trazada por el punto C paralelamente a la recta MN, será la buscada.

Esta recta se puede construir por dos de sus puntos. Para este propósito, es más cómodo tomar los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas. Uno de ellos — el punto de intersección C de la recta con el eje Oy — se da por la propia ecuación, precisamente $C(0; 4)$. Para

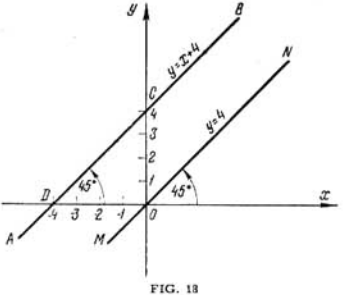


FIG. 18

hallar el punto de intersección D de esta recta con el eje Ox, supongamos $y = 0$ en la ecuación dada; obtendremos $x = -4$; luego, la recta corta el eje Ox en el punto $D(-4; 0)$. Construimos los puntos C y D y trazamos por ellos la recta buscada.

EJEMPLO. Hallar las ecuaciones de las rectas AB, CD y EF representadas en la fig. 19.

SOLUCIÓN. Para escribir las ecuaciones de las rectas dadas, es necesario determinar las magnitudes k y b y, luego, sustituir sus valores en la ecuación $y = kx + b$.

Para la recta AB $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $b = 3$;

Para la recta CD $k = \operatorname{tg} (180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$,

$b = -3$;

Para la recta EF $k = \operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$b = 2$.

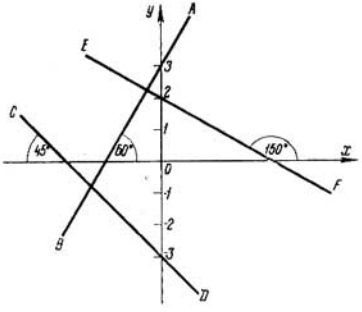


FIG. 19

Por consiguiente, las ecuaciones de estas rectas serán:

$$AB: \quad y = \sqrt{3}x + 3,$$

$$CD: \quad y = -x - 3,$$

$$EF: \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2.$$

Ejercicios

1. Construir las rectas

1) $y = 3x + 2$, 3) $y = -3x + 2$,

2) $y = 3x - 2$, 4) $y = -3x - 2$.

2. ¿En cuál de las rectas

1) $y = -3x + 1$, 2) $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$, 3) $y = -8x - 10$

se halla el punto $A(-1; -2)$? Dar las soluciones analítica y gráfica.

3. Dada la recta $y = 5x - 2$ y, en ella, un punto de abscisa igual a 1. Determinar su ordenada. Dar las soluciones analítica y gráfica.

4. En la recta $y = -2x + 1$ se halla un punto, cuya ordenada es igual a 5. Determinar su abscisa. Dar las soluciones analítica y gráfica.

5. Dadas dos rectas $y = 4x - 2$ e $y = -3x - 6$. Hallar sus puntos de intersección con los ejes de coordenadas. Dar las soluciones analítica y gráfica.

6. El espacio recorrido por un punto en movimiento uniforme se define por la ecuación $S = S_0 + vt$. Construir el gráfico de la trayectoria del punto, tomando $v = 2$ y $S_0 = 1$.

7. La velocidad de movimiento de un punto se define por la ecuación $v = v_0 + at$. Construir el gráfico de la velocidad de movimiento del punto, tomando $v_0 = 3$ y $a = \frac{1}{2}$.

8. Escribir la ecuación de una recta que forme un ángulo de 135° con el sentido positivo del eje Ox y corte, en el eje Oy, un segmento igual a -5.

9. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto A formando un ángulo α con el sentido positivo del eje Ox, si se da: 1) $A(0; 2)$, $\alpha = 45°$; 2) $A(0; -3)$, $\alpha = 135°$; 3) $A(0; 4)$, $\alpha = 150°$.

10. Hallar los ángulos formados con el sentido positivo del eje Ox por las rectas: 1) $y = \sqrt{3}x + 2$; 2) $y = -x - 3$; 3) $y = \frac{1}{2}x + 5$.

11. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $A(2; 5)$ y forme con la dirección positiva del eje Ox un ángulo: 1) $\alpha = 0°$, 2) $\alpha = 90°$ y 3) $\alpha = 180°$.

12. Hallar la ecuación de una recta que pase por el punto $A(1; -3)$ y forme con la dirección positiva del eje Ox un ángulo igual a arc tg (-2).

13. Hallar el coeficiente angular de una recta que pase por el punto A y corte un segmento igual a b en el eje Oy, si se da: 1) $A(3; 4)$, $b = -2$; 2) $A(-2; 5)$, $b = 5$.

14. Dos lados de un cuadrado coinciden con las direcciones positivas de los ejes de coordenadas. Escribir la ecuación de las diagonales del cuadrado si su lado es igual a 12.

15. Escribir la ecuación de los lados de un cuadrado, cuyas diagonales sirven de ejes de coordenadas. La longitud del lado es 4.

16. El lado de un cuadrado es $4\sqrt{2}$. Hallar la ecuación de sus lados y diagonales si uno de sus vértices se halla en el origen de coordenadas y una diagonal coincide con el sentido positivo del eje Oy.

17. El vértice de un triángulo regular con lado igual a 8 cm se halla en el origen de coordenadas, y su lado coincide con el sentido positivo del eje Oy. Escribir la ecuación de los lados del triángulo.

§ **13. Ecuación general de la recta.** En los párrafos anteriores, se han deducido las siguientes formas de ecuación de la recta:

ecuación de una recta paralela al eje Oy:

$$x = a, \text{ donde } a \neq 0; \tag{1}$$

ecuación de una recta paralela al eje Ox:

$$y = b, \text{ donde } b \neq 0; \tag{2}$$

ecuación del eje Oy:

$$x = 0 \tag{3}$$

ecuación del eje Ox:

$$y = 0 \tag{4}$$

ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas:

$$y = kx \tag{5}$$

ecuación de una recta con coeficiente angular y ordenada inicial:

$$y = kx + b. \tag{6}$$

Las ecuaciones (1) — (6) agotan todas las posiciones posibles de una recta; por esto, puede decirse que

toda recta se define por una ecuación de primer grado.

Mostremos, ahora, que todas estas formas de ecuación de la recta pueden deducirse de la ecuación

$$Ax + By + C = 0 \tag{7}$$

con ciertos valores particulares de los coeficientes A, B y C.

I. Si $B = 0$, entonces la ecuación (7) se convierte en

$$Ax + c = 0$$

de donde

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Suponiendo

$$-\frac{C}{A} = a,$$

obtendremos:

$$x = a.$$

La ecuación $Ax + C = 0$ es la ecuación de una recta paralela al eje Oy.

II. Si $A = 0$, entonces

$$By + C = 0,$$

de donde

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Suponiendo

$$-\frac{C}{B} = b,$$

obtendremos:

$$y = b.$$

La ecuación $By + C = 0$ define una recta paralela al eje Ox.

III. Si $B = 0$ y $C = 0$, entonces

$$Ax = 0,$$

de donde

$$x = 0,$$

es decir, tenemos la ecuación del eje de ordenadas.

IV. Si $A = 0$ y $C = 0$, entonces

$$By = 0,$$

de aquí

$$y = 0,$$

es decir, tenemos la ecuación del eje de abscisas.

V. Si $C = 0$, entonces

$$Ax + By = 0,$$

de aquí

$$y = -\frac{A}{B}x.$$

Supongamos

$$-\frac{A}{B} = k,$$

entonces

$$y = kx.$$

La ecuación $Ax + By = 0$ define una recta que pasa por el origen de coordenadas.

VI. Si ninguno de los coeficientes de la ecuación (7) es nulo, entonces, también en este caso puede convertirse

en la forma conocida de ecuación de la recta. De la ecuación (7), hallemos el valor de y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Suponiendo

$$-\frac{A}{B} = k, \quad -\frac{C}{B} = b, \tag{8}$$

podemos escribir:

$$y = kx + b.$$

Por consiguiente, la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

engloba todas las posibles ecuaciones de la recta (examinadas anteriormente por nosotros); por esto, se denomina *ecuación general de la recta.*

Así, pues, *toda ecuación de primer grado*

$$Ax + By + C = 0$$

para todo valor de los coeficientes A, B y C, excepto la igualdad simultánea de A y B a cero, define una recta.

EJEMPLO 1. Construir la recta $2x - 5y + 10 = 0$.

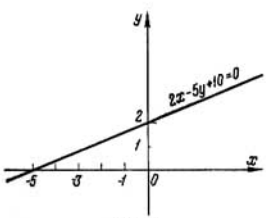


FIG. 20

SOLUCIÓN. Lo más sencillo es construir la recta por los dos puntos de intersección con los ejes de coordenadas. Suponiendo $y = 0$ en la ecuación dada, obtendremos $x = -5$; precisamente las coordenadas $(-5; 0)$ definirán la posición del punto de intersección de la recta y el eje Ox. Para determinar el punto de intersección de la recta y el eje Oy, supongamos $x = 0$ en esa misma ecuación; entonces, tendremos $y = 2$; las coordenadas del punto buscado serán $(0; 2)$.

Construidos estos puntos, trazaremos por ellos la recta $2x - 5y + 10 = 0$ (fig. 20).

EJEMPLO 2. Hallar el coeficiente angular y la ordenada inicial de la recta $4x + 6y - 3 = 0$.

SOLUCIÓN. Expresemos esta ecuación en la forma $y = kx + b$; para ello, hallemos

$$6y = -4x + 3.$$

de donde

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}.$$

Comparando la ecuación obtenida y la ecuación $y = kx + b$, hallaremos:

$$k = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

El coeficiente angular puede determinarse también por la ecuación (8). Como se evidencia, para esto es necesario dividir el *coeficiente de x de la ecuación general de la recta entre el coeficiente de y, y tomar el cociente con el signo contrario*. De esta manera, en el ejemplo dado

$$k = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Ejercicios

1. Construir las rectas: 1) $3x - 4y + 12 = 0$; 2) $4x + 5y + 20 = 0$; 3) $3x - 4y = 0$.

2. Dadas las rectas $5x - 3y + 2 = 0$ y $4x + 5y = 0$. ¿Cuál de ellas pasa por el origen de coordenadas? Dar las soluciones analítica y gráfica.

3. Dadas dos rectas: $2x + 3y - 13 = 0$ y $5x - y - 18 = 0$. En la primera se ha tomado el punto A con abscisa igual a 2, y en la segunda, el punto B con ordenada igual a 7. Hallar la distancia entre los puntos A y B.

4. Dadas las rectas:

$$1)\ 6x - 3y + 10 = 0, \quad 2)\ 5x + 8y - 15 = 0.$$

Transcribirlas en la forma $y = kx + b$.

5. Dadas las rectas:

$$1)\ y = -\frac{3}{4}x, \quad 2)\ y = \frac{2}{3}x - 4.$$

Representar estas ecuaciones en la forma general.

6. Determinar los coeficientes angulares de las rectas:

$$1)\ 2x - 3y + 5 = 0, \quad 2)\ x + 2y = 0.$$

7. Hallar el ángulo que la recta $3x + 3y - 2 = 0$ forma con la dirección positiva del eje Ox.

8. Escribir la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas y posee el mismo coeficiente angular que la recta $2x - 3y + 4 = 0$.

9. Hallar la ordenada inicial de las rectas: 1) $2x - 9y - 6 = 0$, 2) $5x + 2y = 0$.

10. Hallar la ordenada inicial de la recta $5x + 6y - 15 = 0$ y el ángulo que forma con el sentido positivo del eje Ox.

11. En la recta $2x + 3y - 6 = 0$, hallar el punto equidistante de los puntos $A(4; 4)$ y $B(6; 1)$.

12. Mostrar (analíticamente) que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos $A(2; 4)$ y $B(-3; 1)$ es una recta.

13. Mostrar (analíticamente) que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos cualesquiera es una recta.

§ 14. Forma segmentaria de la ecuación de la recta. Como ya sabemos, la posición de una recta se define o por dos puntos o por un punto y el ángulo que la recta forma con el eje Ox. Si la recta no es paralela a ninguno de los ejes y no pasa por el origen de coordenadas, entonces su posición puede determinarse también por otros datos como, por ejemplo, los segmentos que corta en los ejes.

En efecto, una recta corta en ambos ejes de coordenadas segmentos no nulos únicamente si todos los coeficientes de la ecuación general de la recta son distintos de cero. Por consiguiente, su ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

puede transcribirse así:

$$\frac{Ax}{C} + \frac{By}{C} = -1$$

ó

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Suponiendo

$$-\frac{C}{A} = a, \quad -\frac{C}{B} = b,$$

obtendremos la ecuación de nuestra recta en la forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{1}$$

El sentido geométrico de las magnitudes a y b se establece fácilmente:

cuando $y = 0$ y $x = a$,

cuando $x = 0$ y $y = b$.

Por consiguiente, a y b son las magnitudes de los segmentos OM y ON que la recta corta en los ejes Ox y Oy (fig. 21).

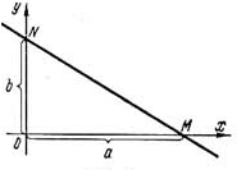


FIG. 21

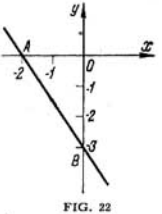


FIG. 22

La ecuación (1) se denomina *forma segmentaria de la ecuación de la recta.*

Por ejemplo, sea dada la recta AB (fig. 22). Aquí, $a = 2$, $b = -3$; en consecuencia, la recta AB se expresa en la forma:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1,$$

ó

$$-\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1.$$

La recta se construye muy fácilmente por la ecuación de la forma (1). Para ello, basta marcar en los ejes los segmentos a y b tomados de la ecuación (¡teniendo en cuenta sus signos!) y, por sus extremos, trazar una recta.

Ejercicios

1. Construir las rectas:

1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, 2) $-\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$,

3) $-\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$, 4) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$.

2. Una recta pasa por los puntos A y B : 1) $A(0; 2)$, $B(4; 0)$; 2) $A(-2; 0)$, $B(0; -1)$; 3) $A(0; 3)$, $B(-2; 0)$. Escribir su ecuación en forma segmentaria.

3. Determinar la longitud del segmento de la recta $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$, comprendido entre los puntos de interseccion de la recta con los ejes de coordenadas.

4. Transcribir las ecuaciones de la recta dadas a continuación en forma segmentaria: 1) $2x + 3y - 6 = 0$, 2) $x - 6y + 6 = 0$, 3) $2x - y - 1 = 0$.

5. Hallar los segmentos que las rectas 1) $3x - 2y - 12 = 0$, 2) $y = 2 - 3x$ y 3) $5x - 4y = 0$ cortan en los ejes de coordenadas.

6. Hallar el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$.

7. Las diagonales de un rombo coinciden con los ejes de coordenadas. Determinar el área de dicho rombo si uno de sus lados se define por la ecuación

$$\frac{x}{2,5} + \frac{y}{10} = 1.$$

8. Dos vértices adyacentes de un rombo se hallan en los puntos $A(5; 0)$ y $B(0; 8)$. Escribir la ecuación en forma segmentaria de cada lado del rombo si sus diagonales coinciden con los ejes de coordenadas.

9. Un segmento de recta comprendido entre los ejes de coordenadas es igual a $3\sqrt{2}$ y forma un ángulo de 135° con el sentido positivo del eje Ox. Escribir la ecuación de esta recta en forma segmentaria (dos casos).

10. Dados los puntos $O(0; 0)$ y $A(-3; 0)$. En el segmento OA se ha construido un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en el punto $B(0; 2)$. Escribir las ecuaciones de los lados del paralelogramo.

§ 15. Ecuación del haz de rectas. En el § 11 se dedujo la ecuación

$$y = kx, \tag{1}$$

que define una recta que pase por el origen de coordenadas. Esta ecuación representa una sola recta si el coeficiente angular k tiene un solo valor determinado. Si se dan diversos valores a la magnitud k, entonces la ecuación (1) definirá el conjunto de rectas que pasan por el origen de coordenadas.

El conjunto de rectas que pasan por un punto se llama haz de rectas con centro en ese punto. De esta manera, la ecuación (1), en la que el coeficiente angular k es una magnitud variable, puede considerarse como ecuación de un haz de rectas que pasan por el origen de coordenadas, exceptuado el eje Oy (por cuanto tg 90° carece de valor numérico).

Deduzcamos ahora la ecuación de un haz de rectas con centro en cualquier punto del plano como, por ejemplo, en el punto O_1 $(x_1; y_1)$. Para ello, efectuemos el traslado paralelo de los ejes Ox y Oy, colocando el origen de coordenadas en el punto O_1 $(x_1; y_1)$. Obtendremos un nuevo sistema de coordenadas XO_1Y (fig. 23), con relación al cual la ecuación de un haz de rectas con centro en el punto O_1 tiene la forma:

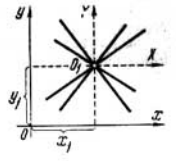


FIG. 23

$$Y = kX. \qquad (2)$$

Pasemos de las nuevas coordenadas X e Y a las antiguas x e y. Con este propósito, sustituyamos X e Y por sus valores tomados de las fórmulas (2) de § 8, en las que sustituiremos a y b por x_1 e y_1, respectivamente.

Obtendremos:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (3)$$

La ecuación (3) define el haz de rectas con centro en el punto O_1 $(x_1; y_1)$, exceptuada sólo la recta paralela al eje Oy (por cuanto $k = \operatorname{tg} 90°$ carece de valor numérico).

Para separar de este haz una recta que forme un ángulo dado con el eje Ox, es necesario sustituir en la ecuación (3) k por su valor numérico. Por ejemplo, sea el punto $M(2; -5)$ el centro de un haz de rectas, entonces la ecuación de la misma tendrá la forma:

$$y + 5 = k(x - 2). \qquad (4)$$

Separemos de este haz una recta que forme un ángulo $\alpha = 45°$ con el sentido positivo de Ox; entonces

$$k = \operatorname{tg} 45° = 1,$$

y la ecuación (4) se convertirá en la siguiente:

$$y + 5 = x - 2$$

ó

$$x - y - 7 = 0.$$

Ejercicios

1. Dada la ecuación de un haz de rectas $y + 2 = k(x - 6)$. Hallar las coordenadas del centro de esta familia.

2. Dada la ecuación de un haz de rectas $y - 4 = k(x + 3)$. ¿Pasan estas rectas por el punto $M(-3; 4)$?

3. Escribir la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto $M(-6; -9)$.

4. Del haz de rectas que pasan por el punto $M(2; -7)$, una de ellas forma un ángulo de 60° con la dirección positiva del eje Ox, y otra, de 150°. Escribir la ecuación de estas rectas.

5. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $M(-1; 8)$ y forme, con el sentido positivo del eje Ox, uno de los ángulos: 45°, 30°, 135°, 180°.

6. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $M(10; -2)$ y forme, con la dirección positiva del eje Ox, un ángulo igual a

1) arc tg 3, 2) arc tg (−2).

7. La altura de un triángulo isósceles coincide con el sentido positivo del eje Oy, y la base, con el Ox. Escribir la ecuación de los lados del triángulo si uno de ellos forma un ángulo de 135° con la dirección positiva del eje Ox, y su altura es igual a 5.

8. La altura de un triángulo equilátero, igual a $6\sqrt{3}$, coincide con la dirección positiva del eje Oy, y la base, con el eje Ox. Escribir la ecuación de los lados laterales del triángulo.

9. Escribir la ecuación de los lados de un trapecio isósceles, sabiendo que sus bases son iguales a 10 y 6 y los lados forman un ángulo de 60° con la base. Por ejes de coordenadas se han tomado la base mayor (eje Ox) y el eje de simetría del trapecio (eje Oy). Examinar dos casos.

§ 16. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados. Sean $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ dos puntos dados; se requiere hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos.

Supongamos, primero, que $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Si, por ejemplo, se toma el punto A, entonces, por él, puede trazarse un haz de rectas, cuya ecuación será:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (1)$$

donde a todo valor de k le corresponde una recta.

Separemos de este haz la recta que pasa también por el segundo punto B (fig. 24). Para hallar su ecuación, es necesario determinar el coeficiente angular. Pero, por cuanto el punto B está en la recta buscada, entonces, sus coordenadas deberán convertir la ecuación (1) en una identidad con k igual al coeficiente angular de esta recta. Sustituyendo las coordenadas x e y en la ecuación (1) por las coordenadas del punto B, obtendremos:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1);$$

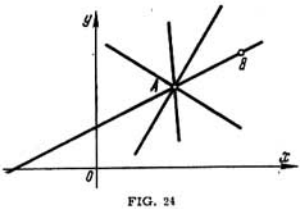


FIG. 24

de aquí hallaremos el coeficiente angular de la recta buscada:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sustituyendo, en la ecuación (1), k por su valor hallado:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Transformemos esta ecuación, dividiendo ambos miembros entre $y_2 - y_1$; obtendremos:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2)$$

La igualdad (2) es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados. La misma es un caso particular de la ecuación general de la recta.

Si $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, la fórmula (2) pierde el sentido, por cuanto no puede dividirse entre cero. En estos casos, los puntos A y B o bien se hallan en una recta paralela al eje Oy o bien en una paralela al Ox. En el primer caso, la ecuación tendrá la forma

$$x = x_1,$$

en el segundo,

$$y = y_1.$$

EJEMPLO 1. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos

$$A(-4;\ 6) \text{ y } B(2;\ -3).$$

SOLUCIÓN. Tenemos:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2$$

e

$$y_1 = 6, \quad y_2 = -3.$$

Sustituyamos estos valores en la ecuación (2), obtendremos:

$$\frac{y-6}{-3-6} = \frac{x+4}{2+4},$$

o

$$\frac{y-6}{-9} = \frac{x+4}{6}.$$

El producto de ambos miembros de esta ecuación por -18 arroja

$$2y - 12 = -3x - 12,$$

de donde

$$3x + 2y = 0.$$

EJEMPLO 2. Por dos puntos $A(3; 2)$ y $B(5; 2)$ pasa una recta. Escribir su ecuación.

SOLUCIÓN. Por cuanto las ordenadas de ambos puntos son iguales, entonces se deduce que la recta buscada es paralela al eje Ox y, por lo tanto, su ecuación será $y = 2$.

Ejercicios

1. Escribir la ecuación de una recta que pase por dos puntos dados, si se da:

1) $A(1; 2)$ y $B(4; 3)$,
2) $A(-2; 3)$ y $B(5; -3)$,
3) $A(0; 6)$ y $B(4; -1)$,
4) $A(3; 0)$ y $B(0; -5)$,
5) $A(-2; -3)$ y $B(-2; 5)$,
6) $A(8; 1)$ y $B(-8; 1)$.

2. Dados los vértices de un triángulo ABC: $A(3; -1)$, $B(4; 2)$ y $C(-2; 0)$. Escribir la ecuación de sus lados.

3. Hallar el ángulo que cada una de las rectas que pasa por los puntos A y B forma con el sentido positivo del eje Ox: 1) $A(2; -5)$ y $B(4; 1)$ 2) $A(-3; -1)$ y $B(3; 2)$.

4. En el plano de una parcela se ha marcado la posición de dos jalones cuyas coordenadas son M_1 (30; 40) y M_2 (50; 80). Hallar el ángulo que la recta M_1M_2 forma con la dirección positiva del eje de abscisas del plano.

5. Hallar la abscisa del punto $A(x; 4)$ situado en la misma recta que los puntos $B(1; 1)$ y $C(-3, -5)$. Dar las soluciones analítica y gráfica.

6. Un punto, al desplazarse en línea recta, ocupó en ciertos momentos las posiciones $A(5; 2)$ y $B(-1; -2)$. Determinar la posición de este punto cuando se hallaba en el eje Ox. Dar las soluciones gráfica y analítica.

7. Determinar los segmentos que una recta que pase por los puntos $A(2; 3)$ y $B(4; 1)$ corta en los ejes de coordenadas.

8. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $A(3; -2)$ y corte en el eje Ox un segmento igual a 5.

9. Dadas las coordenadas de los vértices de un triángulo ABC: $A(2; 4)$, $B(0; 2)$ y $C(4; -2)$. Escribir la ecuación de la recta que pasa por la mitad de los lados AC y BC del triángulo.

10. Dadas las coordenadas de los vértices de un triángulo ABC: $A(4; -2)$, $B(-1; 5)$ y $C(-5; -3)$. Escribir la ecuación de la mediana trazada desde el vértice A.

11. Dadas las coordenadas de tres vértices de un paralelogramo $ABCD$: $A(-1; 2)$, $B(-2; -2)$ y $C(5; -2)$. Escribir la ecuación de sus diagonales AC y BD.

12. Verificar por las vías gráfica y analítica si los puntos $A(-4; 0)$, $B(-8; 3)$ y $C(4; -6)$ se hallan en una misma recta.

13. Dados los vértices de un triángulo ABC: $A(2; -1)$, $B(4; 5)$ y $C(-3; 2)$. Escribir la ecuación de la recta que une el centro de gravedad de este triángulo y el origen de coordenadas.

§ 17. Ángulo entre dos rectas. Sean dadas las ecuaciones de dos rectas:

$$y = k_1 x + b_1,$$

$$y = k_2 x + b_2,$$

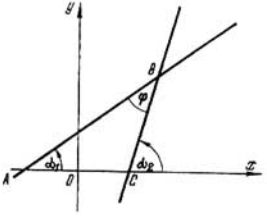


FIG. 25

donde k_1, k_2, b_1 y b_2 poseen valores totalmente definidos. Deduzcamos la fórmula para determinar el ángulo entre estas rectas.

Designemos por φ el ángulo buscado, y por α_1 y α_2 los ángulos que las rectas dadas forman con el sentido positivo del eje Ox (fig. 25).

El ángulo α_2, como ángulo externo del triángulo ABC, será igual a la suma de los dos internos no adyacentes, es decir,

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi,$$

de donde

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Si los ángulos son iguales entre sí, entonces también serán iguales sus tangentes; por lo tanto

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Empleando la fórmula para la diferencia de tangentes de dos ángulos, obtendremos

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Pero

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1 \text{ y } \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2,$$

por lo tanto

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{1}$$

Determinando tg φ por la fórmula (1), puede hallarse también el propio ángulo φ.

EJEMPLO. Determinar el ángulo entre las rectas:

$$2x - 3y + 6 = 0$$

y

$$x + 5y - 2 = 0.$$

SOLUCIÓN. De los datos de las ecuaciones, hallaremos los coeficientes angulares de estas rectas [(8) del § 13]:

$$k_1 = \frac{2}{3} \text{ y } k_2 = -\frac{1}{5},$$

De acuerdo con la fórmula (1), tenemos:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{1}{5} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = -1,$$

de donde

$$\varphi = \operatorname{arc tg} (-1) = 135°.$$

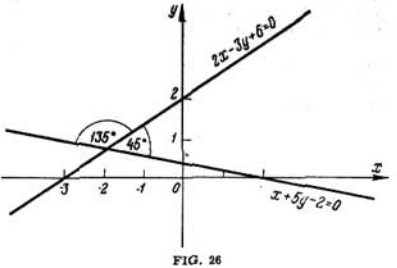


FIG. 26

El ángulo obtenido entre las rectas es obtuso. Pero si se toma

$$k_1 = -\frac{1}{5} \text{ y } k_2 = \frac{2}{3},$$

entonces, calculando tg φ_1 por esa misma fórmula (1), obtendremos:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{5}\right)}{1 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{15}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1 \ ,$$

de donde $\varphi_1 = 45°$. Se ha obtenido un ángulo agudo adyacente al obtuso antes hallado (fig. 26). El primero y segundo valores del ángulo serán la respuesta al problema.

Ejercicios

1. Determinar el ángulo agudo entre las rectas:

1) $y = 2x + 3$ e $y = x - 2$,

2) $3x - y + 6 = 0$ y $x - y + 4 = 0$,

3) $\frac{y}{8} - \frac{x}{4} = 1$ y $\frac{x}{2} + \frac{y}{0{,}8} = 1$,

4) $y + 5 = 3x$ e $y - 2 = 0$.

2. Hallar el ángulo entre la recta $2x - 3y + 6 = 0$ y la recta que pasa por los puntos $A(4; -5)$ y $B(-3; 2)$.

3. Determinar el ángulo que, al cortarse, forman las rectas:

1) $x - 2y - 2 = 0$ e $y = \frac{1}{2}x + 3$.

2) $3x + y - 2 = 0$ y $x - 3y + 1 = 0$.

4. Dos rectas se cortan en el punto $A(2; -1)$. Una de ellas pasa por el origen de coordenadas; la otra, en cambio, por el punto $B(5; 1)$. Hallar el ángulo agudo entre dichas rectas.

5. Dos rectas pasan por el origen de coordenadas formando entre sí un ángulo $\varphi = 45°$. La relación entre sus coeficientes angulares es $6 : 1$. Escribir las ecuaciones de estas rectas.

§ 18. Condición de paralelismo de las rectas. Si las rectas son paralelas entre sí, entonces el ángulo φ entre ellas es igual a $0°$ ó $180°$. En este caso, en la fórmula (1) del § 17, $\operatorname{tg}\varphi = 0$ y tenemos

$$0 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Mas un quebrado es nulo si su numerador es igual a cero, o sea, $k_2 - k_1 = 0$, de donde

$$k_1 = k_2.$$

Y, al revés, si

$$k_1 = k_2,$$

entonces, el numerador del quebrado del miembro derecho de la fórmula (1) del § 17 se convierte en cero; en este caso, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, de donde

$$\varphi = 0° \text{ ó } 180°.$$

Y esto significa que las rectas dadas son paralelas.

Así, pues, *las rectas dadas son paralelas cuando y sólo cuando los coeficientes angulares son iguales.*

EJEMPLO. Escribir la ecuación de una recta que sea paralela a la recta $5x + 3y - 7 = 0$ y pase por el punto $A(-2; 6)$.

SOLUCIÓN. Por el punto A pasa un haz de rectas, entre las cuales se encuentra la buscada. Por consiguiente, en primer

lugar escribimos la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto A [(3) del § 15]:

$$y - 6 = k(x + 2).$$

Luego, de la ecuación de la recta dada en el problema hallamos su coeficiente angular; aplicando la igualdad (8) del § 13, obtendremos:

$$k = -\frac{5}{3}.$$

De acuerdo a la condición de paralelismo, el coeficiente angular de nuestra recta es también igual a $-\frac{5}{3}$.

Sustituyamos el valor hallado $k = -\frac{5}{3}$ en la ecuación de la familia:

$$y - 6 = -\frac{5}{3}(x + 2).$$

Cumplidas las necesarias transformaciones, obtendremos la ecuación buscada:

$$5x + 3y - 8 = 0.$$

Ejercicios

1. ¿Son paralelas las rectas:

1) $2x + 3y - 7 = 0$ y $4x + 6y + 9 = 0$,

2) $y - 2x - 3 = 0$ y $8x - 4y + 1 = 0$,

3) $3x - 5y = 0$ y $6x + 10y + 5 = 0$?

Dar las soluciones analítica y gráfica.

2. ¿A qué es igual a en la ecuación de la recta $y = ax + 4$ paralela a la recta $2y - 3x - 5 = 0$?

3. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $A(2; 3)$ y sea paralela a la recta $y = 2x + 5$.

4. Una recta pasa por el punto $A(-2; -1)$ y es paralela a la recta $2x - y = 5$. Escribir su ecuación.

5. Un punto se desplaza por una recta paralela a otra dada $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$, y en cierto momento de tiempo pasa por el punto $A(-1; 8)$. Hallar la ecuación de la recta por que se desplaza el punto.

6. Dados dos puntos $A(3; 5)$ y $B(-3; 4)$. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $C(-2; 1)$ y sea paralela a AB.

7. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $A(2;\ 5)$ y sea paralela a la recta en la que se hallan los puntos $B(-4;\ 3)$ y $C(-4;\ 1)$.

8. Una recta paralela a la recta $4x - 5y - 9 = 0$ corta el eje Oy encima del origen de coordenadas a una distancia de éste igual a 3 unidades de la escala. Escribir la ecuación de esta recta.

9. Escribir la ecuación de una recta que corte en el eje Ox un segmento igual a 5 y sea paralela a la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

10. El punto $A(4;\ -3)$ es el centro de un haz de rectas. Separar de este haz las rectas paralelas a:

$$2x + 3y - 5 = 0,\ 3x - y + 2 = 0,\ x + 2y - 3 = 0.$$

11. Dando un triángulo con vértices $A(6;\ 4)$, $B(-3;\ 5)$ y $C(-2;\ -6)$. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto A y sea paralela a la mediana trazada desde el vértice B.

12. Dado un triángulo con vértices $O(0;\ 0)$, $A(6;\ 0)$ y $C(0;\ 8)$. Escribir la ecuación de una recta que pase por el vértice A y sea paralela a la bisectriz del ángulo C.

§ 19. **Condición de perpendicularidad de las rectas.** Por cuanto $\operatorname{ctg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi = 1$, la fórmula (1) del § 17 puede anotarse de la siguiente forma:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}. \tag{1}$$

Sean dos rectas perpendiculares entre sí, entonces formarán un ángulo $\varphi = 90°$. Sustituyendo φ por su valor en la ecuación (1), obtendremos:

$$\operatorname{ctg} 90° = 0 = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1},$$

de donde

$$1 + k_1 k_2 = 0$$

y

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{2}$$

Y al revés, si

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},\ \text{es decir,}\ k_1 k_2 + 1 = 0,$$

entonces, el quebrado del miembro derecho de la igualdad (1) del presente párrafo es igual a cero y, por consiguiente,

$$\operatorname{ctg} \varphi = 0, \text{ de donde } \varphi = 90°.$$

Y esto significa que las rectas dadas son perpendiculares entre sí.

De esta manera, *si las rectas son perpendiculares entre sí, entonces sus coeficientes angulares serán inversos por su magnitud absoluta y de signo contrario (y viceversa).*

Por ejemplo, si el coeficiente angular de una de las rectas es $\frac{2}{5}$, entonces, el de la recta perpendicular a ella será $-\frac{5}{2}$.

EJEMPLO. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $A(-3; 5)$ y sea perpendicular a la recta $4x - 3y - 10 = 0$.

SOLUCIÓN. Por el punto A pasa un haz de rectas entre las cuales se halla la buscada. Por esto, escribamos primero la ecuación de este haz

$$y - 5 = k(x + 3). \tag{3}$$

Para separar nuestra recta, es necesario hallar su coeficiente angular k_1, relacionado con el coeficiente angular k_2 de la recta dada por la igualdad (2). Pero $k_2 = \frac{4}{3}$; por consiguiente, $k_1 = -\frac{3}{4}$.

Sustituyendo en la ecuación (3) k por su valor k_1 hallado, obtendremos:

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 3).$$

Esta es, precisamente, la ecuación de la recta buscada. Transformándola, hallaremos:

$$4y - 20 = -3x - 9,$$

ó

$$3x + 4y - 11 = 0.$$

Ejercicios

1. ¿Son perpendiculares las rectas:

1) $3x - y - 3 = 0$ y $x + 3y - 17 = 0$,

2) $2x + 5y - 6 = 0$ y $5x + 2y - 3 = 0$?

Dar las soluciones gráfica y analítica.

2. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $A(2; 7)$ y sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 8 = 0$.

3. Del punto $A(-2; -3)$ a la recta $x - 2y + 3 = 0$ se ha trazado una perpendicular. Escribir su ecuación.

4. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto dado $A(-2; -1)$ y sea perpendicular a la recta $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.

5. Escribir la ecuación de una recta que corte en el eje Oy un segmento igual a 5 y sea perpendicular a la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

6. Dadas las coordenadas de los vértices del triángulo ABC: $A(3; 4)$, $B(2; 5)$ y $C(7; 6)$. Escribir la ecuación de la altura bajada al lado AC.

7. Escribir la ecuación de una recta que pase por la mitad de un segmento que una los puntos $A(4; 3)$ y $B(-2; 5)$ y sea perpendicular a él.

8. Los vértices opuestos de un rombo se hallan en los puntos $A(5; 7)$ y $C(3; 3)$. Escribir la ecuación de sus diagonales.

9. Escribir la ecuación de dos perpendiculares a la recta $2x - y + 5 = 0$, levantadas en los puntos de su intersección con los ejes de coordenadas.

10. Construir el punto $A(-2; 5)$ y la recta $2x - y = 0$. Del haz de rectas que pasa por el punto A, separar dos rectas:

1) la paralela de la dada,

2) la perpendicular a la dada.

11. Los puntos $A(-2; -3)$ y $B(7; 9)$ están unidos por un segmento de recta en el que se ha tomado el punto M que parte el segmento AB en la relación $AM : MB = 1 : 2$. Hallar la ecuación de la perpendicular a AB levantada en el punto M.

12. El vértice de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles se halla en el origen de coordenadas, y la hipotenusa coincide con el sentido positivo del eje Ox. Escribir la ecuación de los lados del triángulo si su hipotenusa es igual a 4.

13. En un triángulo rectángulo isósceles se conocen: la ecuación de a hipotenusa $3x - 7y = 20$ y el vértice del ángulo recto $C(7; -4)$. Escribir a ecuación de los catetos.

§ 20. Intersección de rectas. Sean dadas dos rectas definidas por las ecuaciones

$$Ax + By + C = 0,$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

Se requiere hallar el punto de su intersección.

El punto de intersección de las rectas dadas es su punto común. Las coordenadas del mismo satisfacen tanto a la primera ecuación como a la segunda, o sea, estas coordenadas son raíces comunes de las ecuaciones dadas.

Para hallar estas raíces es necesario, como se sabe del álgebra, *resolver conjuntamente las ecuaciones dadas*, considerándolas como un sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 1. Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x + 3y - 12 = 0,$$

$$x - y - 1 = 0.$$

SOLUCIÓN. Resolvamos las ecuaciones dadas como un sistema. Multiplicando la segunda ecuación por 3 y sumando el resultado a la primera ecuación, obtendremos:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y - 12 = 0 \\ + \\ 3x - 3y - 3 = 0 \\ \hline 5x \qquad - 15 = 0, \end{array}$$

de donde

$$x = 3$$

Conociendo x, despejamos y, por ejemplo, en la segunda ecuación:

$$y = x - 1 = 3 - 1 = 2.$$

EJEMPLO 2. Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x - 5y + 8 = 0,$$

$$4x - 10y - 3 = 0.$$

SOLUCIÓN. Multiplicando todos los miembros de la primera ecuación por -2 y sumando el resultado obtenido a la segunda ecuación, hallaremos:

$$\begin{array}{r} -4x + 10y - 16 = 0 \\ + \\ 4x - 10y - 3 = 0 \\ \hline - 19 = 0, \end{array}$$

lo que es imposible. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones dado carece de raíces y, por ello, las rectas definidas por estas ecuaciones no tienen puntos comunes, es decir, son paralelas.

Comparando los coeficientes angulares de las rectas dadas, puede llegarse a esta misma conclusión.

Ejercicios

1. Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta $4x - 3y - 10 = 0$:

1) con el eje Ox, 2) con el eje Oy.

Dar las soluciones analítica y gráfica.

2. Hallar el punto de intersección de dos rectas:

1) $3x - 2y - 4 = 0$ y $x + 3y - 5 = 0$;

2) $x - 5y + 7 = 0$ y $15y - 3x - 4 = 0$.

Dar las soluciones gráfica y analítica.

3. Mostrar que las rectas $7x - 9y + 15 = 0$ y $13x + 12y - 20 = 0$ se cortan en un punto situado en el eje Oy. Dar las soluciones gráfica y analítica.

4. Determinar las coordenadas de los vértices de un triángulo si se dan las ecuaciones de sus lados:

$$y = 2x - 1, \quad 2y - x = 3, \quad 3y + 2x - 5 = 0.$$

Dar las soluciones analítica y gráfica.

5. Hallar el punto en que la recta que une los puntos $A(4; 1)$ y $B(-1; -4)$ corta el eje de abscisas. Dar las soluciones analítica y gráfica.

6. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $A(2; 5)$ y por el punto B en que se cortan las rectas $3x - y = 0$ y $2x + 5y - 17 = 0$.

7. Por el punto de intersección de las rectas $2x - y - 3 = 0$ y $x - 3y - 4 = 0$ se ha trazado una paralela a la recta $x + y = 1$. Escribir su ecuación.

8. Por el punto de intersección de las rectas $x + 2y + 2 = 0$ y $3x + 4y + 9 = 0$ se ha trazado una perpendicular a la recta $2x + 3y - 6 = 0$. Escribir su ecuación.

9. Hallar la ecuación de la mediana trazada desde el vértice A del triángulo ABC formado por las rectas:

$$AB: \quad 2x - 3y + 11 = 0,$$

$$BC: \quad 3x + y - 11 = 0,$$

$$AC: \quad x + 4y = 0.$$

10. Dadas las ecuaciones de los lados de un triángulo: $2x - 5y = 3$, $x + 3y = 7$ y $3x - 2y + 1 = 0$. Escribir la ecuación de la altura trazada al lado $2x - 5y = 3$.

11. Dado un triángulo, las ecuaciones de cuyos lados son

$$3x + 2y - 5 = 0, \quad 3x - y - 11 = 0, \quad 3x + y - 1 = 0.$$

Escribir la ecuación de la perpendicular al lado $3x + 2y - 5 = 0$, levantada en su mitad.

12. Las diagonales de un rombo se cortan en el punto $M(5; 1)$. Las ecuaciones de una de sus diagonales y de uno de sus lados son, respectivamente,

$$y - x + 4 = 0 \quad \text{y} \quad 3y - x - 6 = 0.$$

Hallar las coordenadas de sus vértices.

Problemas mixtos

1. Hallar el punto de intersección de la recta $3x + 4y = 8$ con los ejes de coordenadas.

2. Mostrar que las rectas $4x + 3y - 5 = 0$, $3x - y + 6 = 0$ y $2x - y + 5 = 0$ pasan por un punto.

3. Una recta, paralela al eje Ox y que dista del mismo 4 unidades contadas en el sentido positivo del eje Oy, corta la recta $3x - 4y + 5 = 0$. Hallar el punto de intersección de dichas rectas.

4. Mostrar que la recta en que se hallan los puntos $A(-3; 6)$ y $B(2; -4)$ pasa por el origen de coordenadas.

5. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $A(3; -5)$ y corte en el eje Ox un segmento igual a -2.

6. Verificar si los puntos $A(1; 3)$, $B(5; 7)$ y $C(10; 12)$ se hallan en una misma recta.

7. Hallar la longitud del segmento de la recta $4x + 3y + 12 = 0$, comprendido entre los ejes de coordenadas.

8. ¿Qué ordenada tiene el punto $C(5; y)$ situado en la misma recta que los puntos $A(-8; -6)$ y $B(-3; -1)$?

9. Escribir la ecuación de una recta que pase por el punto $A(-3; 4)$ y sea paralela a la bisectriz del primer ángulo de coordenadas.

10. En la bisectriz del primer ángulo de coordenadas, hallar un punto cuya distancia hasta el punto $M(-2; 0)$ sea igual a 10.

11. ¿Cúal deberá ser el valor de m para que la recta $y = mx + 3$ pase por el punto de intersección de las rectas $2x - y + 1 = 0$ e $y = x + 5$?

12. Los vértices opuestos de un cuadrado se hallan en los puntos $A(-2; 5)$ y $C(2; 8)$. Hallar la longitud y las ecuaciones de sus diagonales.

13. Dos vértices adyacentes de un cuadrado $ABCD$ se hallan en los puntos $A(-5; 4)$ y $D(-3; 2)$, y su diagonal AD es paralela al eje Ox. Determinar las coordenadas de los otros dos vértices.

14. Dadas las ecuaciones de los lados de un triángulo: $x + 2y - 2 = 0$, $2x + y - 13 = 0$ y $x - 2y + 6 = 0$. Mostrar que este triángulo es rectángulo y determinar el radio de la circunferencia circunscrita al mismo.

15. Se requiere trazar una recta que pase por el punto $M(30; 50)$ y forme un ángulo de 45° con la dirección positiva del eje Ox. ¿A qué distancia del eje Ox deberán tomarse dos puntos que disten 1 y 3 del eje de ordenadas, para que la recta buscada pase por ellos?

16. Determinar los ángulos que los lados de un triángulo ABC forman con el sentido positivo del eje Ox, si sus vértices se hallan en los puntos $A(1;\ 3)$, $B(6;\ 1)$ y $C(-1;\ -3)$.

17. Dos rectas se cortan en el punto $A(2;\ -5)$. Hallar el ángulo agudo entre ellas, si una pasa por el punto $B(1;\ -3)$ y otra por el $C(4;\ 1)$.

18. Dadas dos rectas $y = 2x + 1$ y $3x - 2y - 5 = 0$. Determinar la distancia entre los puntos en que se cortan por la recta $x - y - 3 = 0$.

19. Por el punto $A(-5;\ 3)$ se ha trazado una recta de forma que el segmento de la misma, comprendido entre los ejes de coordenadas, se parta por la mitad en este punto. Escribir la ecuación de la recta.

20. Por el punto $A(-4;\ -3)$ se ha trazado una recta de forma que corte segmentos iguales en los ejes de coordenadas. Escribir la ecuación de esta recta.

21. Un lado de un triángulo, igual a 10, se halla en el eje Ox, y uno de sus vértices, en el punto $A(4;\ 6)$. Hallar la ecuación de los lados de ese triángulo, si uno de los laterales corta un segmento igual a -2 en el eje de abscisas (dos casos).

22. Dado un triángulo ABC con vértices $A(8;\ 4)$, $B(-2;\ 6)$ y $C(4;\ 0)$. Desde el punto D, que divide el lado BC en la relación $BD : DC = 2 : 1$, se ha trazado una recta por el centro E del lado AB. Hallar la ecuación y la longitud del segmento DE.

23. Dados dos puntos $A(-4;\ -3)$ y $B(1;\ 2)$. Escribir la ecuación de una recta que, trazada perpendicularmente a AB por el punto C, divida el segmento AB en la relación $AC : CB = 1 : 2$.

24. Dos vértices de una placa homogénea triangular se hallan en los puntos $A(6;\ 0)$ y $B(-8;\ -2)$, y su centro de gravedad, en el $M(1;\ 2)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice.

25. En tres puntos $A(-1;\ 0)$, $B(-2;\ 4)$ y $C(4;\ -5)$ se han colocado cargas de 30 kg, 50 kg y 70 kg, respectivamente. Hallar el centro de gravedad de este sistema.

26. Dado un triángulo ABC con vértices $A(-5;\ -1)$, $B(-1;\ 4)$ y $C(3;\ 2)$. Por el vértice A se ha trazado una paralela a BC, y por el B una perpendicular a esta recta. Hallar las coordenadas del punto de intersección de las rectas trazadas.

27. ¿Por qué línea deberá desplazarse un punto, cuya posición inicial está definida por las coordenadas $(3;\ 8)$, para llegar por la vía más corta hasta la recta $y = \frac{1}{2}x - 1$? ¿En qué punto alcanzará a esta recta y cuál será la magnitud del espacio recorrido?

28. Dos rectas se cortan en un punto situado en el eje Ox, formando entre sí un ángulo de 45°; la recta de menor pendiente con relación al sentido positivo del eje Ox se define por la ecuación $2x - 3y - 6 = 0$. Escribir la ecuación de la segunda recta.

29. Dadas las ecuaciones de los lados de un triángulo: $2x - 3y + 11 = 0$, $3x + y - 11 = 0$, $x + 4y = 0$. Hallar el ángulo que la mediana trazada al lado $x + 4y = 0$ forma con la dirección positiva del eje Ox.

30. El segmento de la recta $x + 2y - 6 = 0$ situado entre los ejes de coordenadas se ha dividido en tres partes iguales, y desde los puntos de división se han levantado perpendiculares a dicha recta hasta la intersección con el eje Oy. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección.

31. Dadas las mitades de los lados de un triángulo ABC: $M_1(1;\ 1)$, $M_2(3;\ -5)$ y $M_3(5;\ -3)$. Escribir la ecuación de sus lados.

32. Dados dos vértices $A(3;\ -1)$ y $B(5;\ 5)$ de un triángulo ABC y su ortocentro $N(6;\ 2)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice.

33. Dadas las ecuaciones de los lados de un triángulo: $x + y - 3 = 0$, $x = 0$, $2x + y - 1 = 0$. Hallar la longitud de la altura trazada al lado $x + y - 3 = 0$.

34. Hallar el área de un paralelogramo, conociendo las ecuaciones de sus lados: $y = 2x + 1$, $y = 2x - 5$, $y = x - 2$, $y = x + 2$.

35. Determinar el área de un rombo, conociendo las ecuaciones de sus lados: $y = 0$, $y = 4$, $y = \frac{4}{3}x$, $y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$.

36. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles es paralelo al eje Ox y dista del mismo 8 unidades; la prolongación de la hipotenusa pasa por el origen de coordenadas. Escribir la ecuación de los lados de este triángulo, si el cateto es igual a 6 y el triángulo se halla en el primer ángulo de coordenadas (dos casos).

37. Dos lados de un cuadrado se definen por las ecuaciones $x + 3y + 10 = 0$ y $3x - y - 20 = 0$, y su centro se halla en el punto $M(3;\ -1)$. Hallar la ecuación de las diagonales del cuadrado.

38. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es paralela al eje Ox. El vértice del ángulo recto se halla en el punto $A(8;\ 20)$, y uno de los vértices agudos, en el eje Oy. Escribir las ecuaciones de los lados de este triángulo (dos casos).

39. Uno de los lados de un triángulo regular es paralelo al eje Oy y corta un segmento igual a -4 en el Ox, y el vértice opuesto se halla en el punto $A(2;\ 0)$. Hallar las ecuaciones de las alturas.

40. La hipotenusa de un triángulo rectángulo corta los ejes de coordenadas en los puntos $A(-5;\ 0)$ y $B(0;\ 5)$, y uno de los catetos, en los puntos $C(-2;\ 0)$ y $D(0;\ 1)$; mientras, la prolongación del otro cateto corta un segmento igual a 4 en el eje Ox. Hallar las coordenadas de los vértices.

41. Dos lados y la diagonal que parten desde un vértice de un paralelogramo se definen, respectivamente, por las ecuaciones $x - y + 4 = 0$, $y = 5$ y $5x + 2y - 15 = 0$. Escribir la ecuación de los otros dos lados del paralelogramo, si el punto de intersección de sus diagonales se halla en el eje Ox.

42. Dos vértices opuestos de un rombo $ABCD$ se hallan en los puntos $A(1;\ 3)$ y $C(5;\ 9)$, y el lado AD se define por la ecuación $x - y + 2 = 0$. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

43. Dos vértices opuestos de un rectángulo $ABCD$ se hallan en los puntos $A(1;\ 4)$ y $C(5;\ 6)$, y el lado CD forma un ángulo de 45° con el sentido positivo del eje Ox. Hallar el área de este rectángulo.

44. Uno de los lados de un rombo pasa por el origen de coordenadas y forma un ángulo igual a arc tg $\frac{4}{3}$ con el sentido positivo del eje Ox, y otro lado se define por la ecuación $y = 8$. Hallar las ecuaciones de los demás lados, si las diagonales del rombo se cortan en un punto situado en el eje de abscisas.

45. Dado un triángulo ABC con vértices $A(4;\ 1)$, $B(7;\ 5)$ y $C(-4;\ 7)$. Hallar el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A y el lado opuesto BC.

46. Dados los vértices de un triángulo $A(-2; -8)$, $B(3; -8)$ y $C(3; -5)$. Escribir la ecuación de la bisectriz del ángulo B.

47. Desde el punto $A(6; 9)$ parte un rayo de luz que forma un ángulo de 45° con el sentido positivo del eje Ox; al llegar al eje Ox se refleja de él. Hallar las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.

48. Un rayo de luz en dirección de la recta $2x - 3y - 12 = 0$, al llegar al eje Ox, se refleja. Determinar la ecuación del rayo reflejado.

49. Un rayo de luz parte del punto $A(2; 3)$, se refleja del eje Ox y llega al punto $B(5; 8)$. Hallar las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.

50. Un rayo de luz que pasa por el punto $A(3; 4)$, se refleja de la recta $x + y - 2 = 0$, y, después de esto, pasa por el punto $B(5; 2)$. Hallar las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.

Capítulo IV
Curvas de segundo grado

§ 21. **La circunferencia y su ecuación.** *Se llama circunferencia el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto fijo llamado centro.*

Aplicando esta definición, deduzcamos la ecuación de la circunferencia. Sea su radio r, y el centro, el origen de coordenadas. Tomemos un punto cualquiera $M(x; y)$ en la circunferencia (fig. 27).

Conforme a la fórmula de la distancia entre dos puntos, podemos escribir:

$$OM = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

o, tras de elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad,

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{1}$$

Por cuanto M es un punto cualquiera de la circunferencia y r una magnitud constante, la igualdad (1) es justa para todos los puntos de la circunferencia, es decir, las coordenadas de todos sus puntos satisfacen esta igualdad. Mas, si esto es así, dicha igualdad debe considerarse *ecuación de una circunferencia de radio r y centro en el origen de coordenadas*.

Hallemos la ecuación de una circunferencia cuyo centro esté situado en cualquier punto del plano, por ejemplo, en el $O_1(a; b)$ (fig. 28). Traslademos los ejes de coordenadas Ox y Oy, conservando su sentido inicial y colocando el origen en el punto $O_1(a; b)$. Obtendremos un nuevo sistema de coordenadas XO_1Y, con relación al cual la ecuación de la circunferencia con centro en O_1 tendrá la forma

$$X^2 + Y^2 = r^2. \tag{2}$$

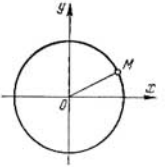


FIG. 27

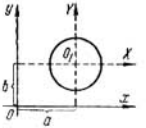


FIG. 28

Expresemos las nuevas coordenadas X e Y por las antiguas x e y. Para este fin, en la ecuación (2) sustituyamos X e Y por sus valores tomados de las fórmulas (2) de § 8. Obtendremos

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \tag{3}$$

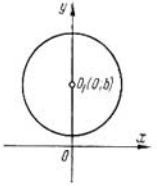


FIG. 29

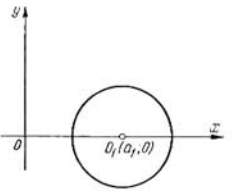


FIG. 30

La ecuación (3) define *una circunferencia con centro en el punto* $O_1(a; b)$.

Si se supone $a = 0$, la ecuación (3) se convertirá en la siguiente:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

y definirá *una circunferencia con centro en el eje Oy* (fig. 29). Con $b = 0$, la ecuación (3) tomará la forma

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

y definirá *una circunferencia con centro en el eje Ox* (fig. 30).

Por último, cuando $a = 0$ y $b = 0$, la ecuación (3) se convierte en:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

y definirá *una circunferencia con centro en el origen de coordenadas* (fig. 27).

Construyamos la circunferencia por su ecuación. Sea necesario, por ejemplo, construir la circunferencia

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9.$$

Transcribamos esta ecuación de la siguiente forma:

$$(x - 2)^2 + [y - (-3)]^2 = 9;$$

comparándola con (3), vemos que las coordenadas del centro O_1 de la circunferencia son $(2; -3)$ y su radio $r = 3$. Hallando el punto O_1 $(2; -3)$, circunscribamos a su alrededor una circunferencia de radio igual a 3, que será la buscada (fig. 31).

§ 22. Ecuación de la circunferencia, como forma particular de la ecuación general de segundo grado. Eliminando paréntesis en la ecuación (3) del § 21, podemos anotar

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

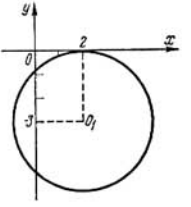


FIG. 31

Multiplicando por A todos los términos de la última igualdad, obtendremos:

$$Ax^2 + Ay^2 - 2Aax - 2Aby + Aa^2 + Ab^2 - Ar^2 = 0 \qquad (1)$$

Supongamos

$$-2Aa = D, \quad -2Ab = E, \quad Aa^2 + Ab^2 - Ar^2 = F; \qquad (2)$$

entonces, la ecuación (1) de la circunferencia tomará la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (3)$$

La ecuación (3) es un caso particular de la ecuación general de segundo grado de dos variables. En efecto, comparemos la primera con la última que, como se sabe, tiene la siguiente forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (4)$$

Vemos que la ecuación (4) se diferencia de la (3) sólo por que en ésta son iguales los coeficientes de x^2 e y^2 y carece de término que contenga el producto xy.

Por lo tanto, *la circunferencia se define por una ecuación general de segundo grado de dos variables, si en ella son iguales los coeficientes de* x^2 *e* y^2 *y carece de término que contenga el producto* xy.

Y, al revés, la ecuación de la forma (3), hablando en general, define una circunferencia. Cerciorémonos de ello en un ejemplo. Sea dada la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0. \qquad (5)$$

Transcribámosla en la forma siguiente:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 8y) = 5$$

y transformemos los binomios entre paréntesis en cuadrados completos de la suma y la diferencia, añadiendo 4 al primero y 16 al segundo. Para que se conserve la igualdad, añadamos $4 + 16$ a su miembro derecho. Obtendremos:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) = 5 + 4 + 16,$$

ó

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

La última igualdad es la ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro en el punto $O_1\ (-2;\ 4)$.

Existen, no obstante, casos en que la ecuación (3) con ciertos valores de los coeficientes no define una circunferencia; por ejemplo, a la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ la satisfacen las coordenadas de un único punto $(0;\ 0)$, y a la ecuación $x^2 + y^2 = -4$ no la satisfacen las coordenadas de ningún punto, por cuanto la suma de los cuadrados de números reales no puede tener valor negativo.

Si la ecuación de una circunferencia se da en forma desarrollada, las coordenadas de su centro y su radio pueden

hallarse por dos procedimientos. El primero consiste en transformar la ecuación de modo análogo a como lo hicimos en el ejemplo (5); para el segundo, pueden utilizarse las igualdades (2), de las que tenemos

$$a = -\frac{D}{2A}, \quad b = -\frac{E}{2A}, \quad r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A}. \qquad (6)$$

Y conociendo a, b y r, es fácil construir la circunferencia. Por ejemplo, para construir la circunferencia

$$4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 11 = 0$$

hallamos de las igualdades (6)

$$a = -\frac{-8}{2 \cdot 4} = 1, \quad b = -\frac{4}{2 \cdot 4} =$$

$$= -\frac{1}{2}, \quad r^2 = 1 + \frac{1}{4} - \frac{-11}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

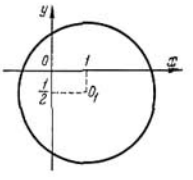


FIG. 32

La circunferencia buscada está representada en la fig. 32.

EJEMPLO. Dadas una circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ y una recta $x + y - 7 = 0$. Hallar la longitud de la cuerda perteneciente a la recta.

SOLUCIÓN. Por cuanto los extremos de la cuerda son puntos comunes de la circunferencia y la recta dadas, entonces sus coordenadas satisfacen tanto a la ecuación de la primera línea como a la de la segunda. Por lo tanto, para hallar estas coordenadas es necesario resolver conjuntamente ambas ecuaciones. Sustituyendo el valor

$$y = 7 - x$$

en la ecuación de la circunferencia, obtendremos:

$$x^2 + (7 - x^2) - 4x + 2(7 - x) - 15 = 0,$$

ó

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 - 4x + 14 - 2x - 15 = 0,$$

o, por último,

$$x^2 - 10x + 24 = 0.$$

De aquí

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1,$$

$$x_1 = 5 - 1 = 4, \quad x_2 = 5 + 1 = 6.$$

Hallamos los valores de y:

$$y_1 = 7 - x_1 = 7 - 4 = 3,$$

$$y_2 = 7 - x_2 = 7 - 6 = 1.$$

Así, pues, los extremos de la cuerda son los puntos con las coordenadas (4; 3) y (6; 1).

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos, podemos hallar la longitud de la cuerda:

$$d = \sqrt{(4 - 6)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Ejercicios

1. Escribir la ecuación de una circunferencia con centro en el punto O_1 y radio r, si se dan:

1) $O_1(-1; 2)$, $r = 5$, 2) $O_1(-2; -3)$, $r = \sqrt{5}$ y 3) $O_1(0; 5)$, $r = 6$.

2. Construir las circunferencias:

1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$, 2) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ y 3) $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

3. Dada una circunferencia $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$. ¿Se hallan en ella los puntos:

$$A(3; -1),\ B(3; -9) \text{ y } C(0; -3)?$$

4. Dada una circunferencia $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$ y un punto en ella con la ordenada igual a 0. Hallar su abscisa.

5. Escribir la ecuación de una circunferencia con centro en el punto O_1 y que pase por el punto A, si se dan:

1) $O_1(2; 1)$, $A(5; 5)$ y 2) $O_1(-3; 2)$, $A(-4; 0)$.

6. Escribir la ecuación de una circunferencia que pase por dos puntos: $A(-5; 5)$ y $B(1; 3)$ y tenga radio $r = \sqrt{10}$.

7. Escribir la ecuación de una circunferencia que pase por dos puntos: $A(2; 4)$ y $B(-2; 0)$ y tenga el centro en el eje Ox.

8. Escribir la ecuación de una circunferencia que pase por tres puntos:

$$A(0; 2),\ B(1; 1) \text{ y } C(2; -2).$$

9. Ambos ejes de coordenadas son tangentes a una circunferencia que pasa por el punto $A(2; 9)$. Hallar su ecuación.

10. El eje Oy es tangente a una circunferencia en el punto $A(0; -3)$; el radio de ésta $r = 2$. Escribir su ecuación.

11. Escribir la ecuación de una circunferencia cuyo punto de tangencia con el eje Ox se halle en el origen de coordenadas y que pase por el punto $A(0; -8)$.

12. Hallar las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

13. Construir las circunferencias:

1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$,

2) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$,

3) $x^2 + y^2 - 12y + 11 = 0$,

4) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y - 5 = 0$.

14. Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$. Escribir la ecuación de su línea de centros (es decir, de la recta que pasa por los centros de estas circunferencias).

15. Hallar la distancia entre los centros de las circunferencias $x^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$.

16. Escribir la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$, paralelo al eje Oy.

17. Dada una circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$. Escribir la ecuación del diámetro que forma un ángulo de 45° con el eje Ox.

18. Dada una circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$. Escribir la ecuación del diámetro perpendicular a la cuerda $2x - y + 3 = 0$.

19. Hallar las coordenadas de los puntos en que la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$ corta el eje Ox.

20. Escribir la ecuación del radio trazado al punto $A(1; 4)$ de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$.

21. Escribir la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0$ en su punto $A(9; 3)$.

22. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta $y = x - 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$.

23. Hallar los puntos de intersección de la recta $x = 3$ y la circunferencia $x^2 + y^2 + 3x - 6y - 9 = 0$.

24. ¿Cómo está situada la recta $y - 6 = 0$ respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$?

25. Escribir la ecuación de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 = 10$ y $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$.

§ 23. La elipse y su ecuación. *Se llama elipse el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos denominados focos es constante (y mayor que la distancia entre los focos).*

Por ejemplo, sean tomados en una elipse los puntos M_1, M_2, M_3, M_4, etc. (fig. 33). Si los focos se designan por

F y F_1, entonces, de acuerdo con la definición dada, podrá escribirse:

$$F_1M_1 + FM_1 = F_1M_2 + FM_2 = F_1M_3 + FM_3 = \\ = F_1M_4 + FM_4 = \text{const.} \qquad (1)$$

El lugar geométrico de los puntos que poseen la propiedad indicada (1) es, precisamente, una elipse.

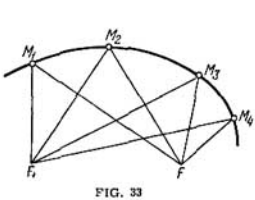


FIG. 33

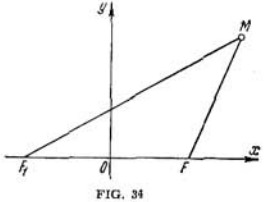


FIG. 34

Sobre la base de la definición de la elipse, formaremos su ecuación. Para ello, elijamos el sistema de coordenadas del modo siguiente. Por eje Ox tomaremos la recta que pasa por los focos F y F_1, y por eje Oy, la mediatriz del segmento FF_1 (fig. 34). Designemos por $2c$ la distancia FF_1 entre los focos, entonces, las coordenadas de éstos serán:

$$F(c;\ 0) \text{ y } F_1(-c;\ 0).$$

Tomemos en la elipse un punto cualquiera $M(x;\ y)$. Designemos por $2a$ la magnitud constante de la suma de distancias desde cada punto hasta los focos, entonces

$$FM + F_1M = 2a. \qquad (2)$$

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos, hallaremos:

$$FM = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Ahora, la igualdad (2) se transcribirá del modo siguiente:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (3)$$

y representará *la ecuación de la elipse* en el sistema de coordenadas tomado.

Simplifiquemos la ecuación (3). Para ello, pasemos uno de los radicales al miembro derecho:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Elevemos al cuadrado ambos miembros de esta igualdad:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Eliminemos paréntesis:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} + \\ + x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

Reduzcamos términos semejantes:

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} + 2cx,$$

ó

$$4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = 4a^2 + 4cx.$$

Simplificando por 4 y elevando de nuevo al cuadrado ambos miembros de la igualdad, obtendremos:

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = (a^2+cx)^2,$$

ó

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2.$$

Pasemos a la izquierda todos los términos que contengan x e y y, a la derecha, los restantes:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$

ó

$$(a^2-c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \qquad (4)$$

Pero, conforme a la definición de la elipse

$$2c < 2a,$$

de aquí

$$c < a.$$

De la última inecuación se deduce que $a^2 - c^2 > 0$ y, por ello, esta diferencia puede designarse por b^2. Sustituyendo este símbolo en la igualdad (4), hallaremos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{5}$$

Por último, dividamos entre a^2b^2 todos los términos de la igualdad (5); obtendremos definitivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6}$$

donde

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{7}$$

La ecuación (6) es, precisamente, *la forma canónica de la ecuación de la elipse* *).

§ 24. Investigación de la ecuación de la elipse. Hallemos primero y de la ecuación (5) del § 23:

$$y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2},$$

de donde

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{1}$$

De esa misma ecuación (5), hallaremos:

$$x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2},$$

por consiguiente,

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}. \tag{2}$$

Ahora, examinemos las igualdades (1) y (2).

*) La ecuación (6) se ha obtenido elevando dos veces al cuadrado la (3), a consecuencia de lo cual, hablando en general, es posible la aparición de raíces extrañas. Se puede mostrar que la ecuación (6) no tiene raíces extrañas, o sea, que todo punto cuyas coordenadas satisfagan a la misma se halla en una elipse.

I. Sea

$$|x| < a.$$

Entonces, el radicando de la igualdad (1) será un número positivo y, por tanto, y tendrá dos valores de igual magnitud absoluta, pero de signo contrario. Esto significa que a todo valor de x le corresponde dos puntos en la elipse simétricos con relación al eje Ox.

Sea ahora

$$|y| < b.$$

Entonces, a todo valor de y, como evidencia la igualdad (2), le corresponden dos valores de x de igual magnitud absoluta, pero de signo contrario. De aquí se deduce que a todo valor de y le corresponden dos puntos en la elipse simétricos con relación al eje Oy.

De lo dicho deducimos: la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *es simétrica con relación a los ejes de coordenadas.*

II. Hallemos el punto de intersección de la elipse con el eje Ox. Sea

$$y = 0;$$

entonces, de la igualdad (2), tenemos:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2} = \pm a.$$

De aquí se deduce: *la elipse corta el eje Ox en dos puntos cuyas coordenadas son* $(a; 0)$ y $(-a; 0)$ (puntos A y A_1 en la fig. 35).

III. Hallemos el punto de intersección de la elipse y el eje Oy. Sea

$$x = 0;$$

entonces, de la igualdad (1) tenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2} = \pm b.$$

De aquí deducimos que *la elipse corta el eje Oy en dos puntos, cuyas coordenadas son* $(0; b)$ y $(0; -b)$ (los puntos B y B_1 en la fig. 36).

IV. Si x toma valores tales que

$$|x| > a; \tag{3}$$

la expresión del radicando en la igualdad (1) será negativa y, por lo tanto, y tendrá valores imaginarios. Mas esto signi-

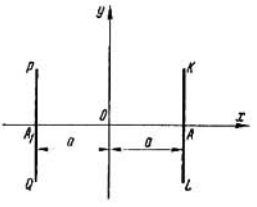


FIG. 35

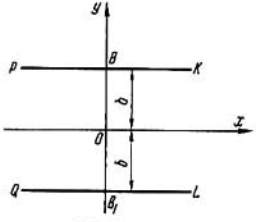


FIG. 36

fica que, en la elipse, no existen puntos cuyas abscisas satisfagan la condición (3), o sea, la elipse está situada entre las rectas $x = +a$ y $x = -a$ (véase la fig. 35; las rectas KL y PQ).

Si se supone

$$|y| > b \tag{4}$$

de la igualdad (2) obtendremos valores imaginarios de x. Esto quiere decir que los puntos que satisfacen la condición (4) no se hallan en la elipse, o sea, ésta se encuentra entre las rectas $y = +b$ y $y = -b$ (véase la fig. 36, las rectas PK y QL).

De lo dicho se deduce que *la elipse está inscrita en un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas, siendo sus longitudes* $2a$ y $2b$, y *cuyas diagonales concurren en el origen de coordenadas* (fig. 37).

La forma de la elipse se muestra en la fig. 38.

Los puntos A, A_1, B y B_1 se denominan *vértices de la elipse*, y el punto O, *centro* de la misma. El segmento $A_1A = 2a$ se llama *eje mayor*, y el $B_1B = 2b$, *eje menor*. Los segmentos FM y F_1M_1 se llaman *radios focales* del punto M.

Aplicando la definición de la elipse, se puede construir fácilmente esta curva mediante un movimiento continuo del

lápiz. Para ello, tomemos un hilo inelástico de longitud igual a la del eje mayor, es decir, $2a$, y fijemos sus extremos en los focos cuya posición se presupone conocida.

Tensemos el hilo con el lápiz y, manteniéndolo siempre tenso, describamos con la punta una curva que será, precisa-

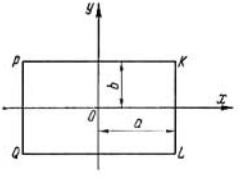


FIG. 37

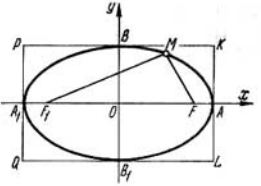


FIG. 38

mente, una elipse, por cuanto la suma de distancias de cualquiera de sus puntos a los focos es igual a la longitud del hilo, o sea, es una magnitud constante.

§ 25. **Excentricidad de la elipse.** *Excentricidad de una elipse se llama la razón entre la distancia focal y la longitud del eje mayor, o sea,* $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

Generalmente, la excentricidad se designa por la letra e. Así, pues,

$$e = \frac{c}{a}. \tag{1}$$

Como $0 < c < a$ (§ 23), la excentricidad será una magnitud positiva inferior a la unidad.

De acuerdo con la fórmula (7) del § 23

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Por ello, la igualdad expuesta a continuación puede servir para definir la excentricidad:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{2}$$

La excentricidad caracteriza la forma de la elipse, cosa fácil de percibir por la fórmula (2). Por ejemplo, si se disminuye la magnitud b sin variar a, aumentará la diferencia $a^2 - b^2$, por lo que aumentará también el quebrado del miembro derecho de la fórmula y, por consiguiente, crecerá e. La excentricidad crecerá asimismo si aumenta a, dejando invariable b.

Hemos examinado una elipse en la que $b < a$. Cuando $b > a$, la ecuación (6) del § 23 define una elipse cuyos focos se hallan en el eje Oy; en este caso, su eje mayor será $2b$, y el menor, $2a$. Conforme a lo señalado, la fórmula (7) del § 23 y las (1) y (2) del presente párrafo tomarán la siguiente forma:

$$a^2 = b^2 - c^2, \quad e = \frac{c}{b}, \quad e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$

EJEMPLO. Dada una elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$. Hallar la longitud de sus ejes, las coordenadas de los vértices y los focos y la magnitud de la excentricidad.

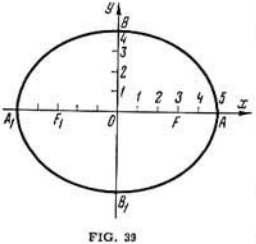


FIG. 39

SOLUCIÓN. Dividiendo entre 400 ambos miembros de la ecuación obtendremos:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

De aquí

$$a^2 = 25, \quad b^2 = 16$$

y

$$a = 5, \quad b = 4.$$

De esta manera, el eje mayor de la elipse $A_1A = 2a = 10$, y el menor, $B_1B = 2b = 8$ (fig. 39). Las coordenadas de sus vértices serán:

$$A(5;\ 0), \qquad A_1(-5;\ 0),$$
$$B(0:\ 4), \qquad B_1(0;\ -4).$$

Para hallar las coordenadas de los focos, es necesario determinar la magnitud $OF = c$. De la igualdad (7) de § 23, tenemos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

Por lo tanto, dichas coordenadas serán:

$$F(3;\ 0)\ \text{y}\ F_1(-3;\ 0).$$

Por último, mediante la fórmula (1) del presente párrafo hallamos:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

§ 26. Relación entre una elipse y una circunferencia. Supongamos que los semiejes de la elipse son iguales entre sí, es decir, $a = b$; entonces, la ecuación de la elipse tomará la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Como se sabe, la ecuación obtenida define una circunferencia de radio a.

Veamos a qué será igual la excentricidad en este caso; suponiendo, en la fórmula (2) del § 25

$$a = b,$$

obtendremos:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - a^2}}{a} = 0.$$

De aquí se deduce que la circunferencia es un caso particular de elipse en la que los semiejes son iguales entre sí y, por lo tanto, la excentricidad es nula.

Ejercicios

1. Escribir la forma canónica de la ecuación de una elipse si se dan sus semiejes $a = 5$ y $b = 4$.

2. Dada una elipse $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. Hallar sus ejes y la distancia focal.

3. Determinar la longitud de los ejes y las coordenadas de los focos de la elipse $49x^2 + 24y^2 = 1176$.

4. Escribir la ecuación de una elipse en la que sus dos vértices se hallen en los puntos $A(8;\ 0)$ y $A_1(-8;\ 0)$ y los focos tengan las coordenadas $(\pm 5;\ 0)$.

5. Escribir la ecuación de una elipse si sus focos tienen las coordenadas $(\pm 3;\ 0)$ y la longitud del eje mayor es igual a 12.

6. Escribir la ecuación de una elipse, si la longitud de su eje menor es igual a 6 y las coordenadas de los focos son $(0; \pm 4)$.

7. Hallar la excentricidad de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 180$.

8. Escribir la forma canónica de la ecuación de una elipse si se dan $2c = 8$ y $\varepsilon = 0{,}8$.

9. Escribir la ecuación de una elipse en la que los focos tengan las coordenadas $(0; \pm 5)$ y la excentricidad sea igual a $\frac{2}{3}$.

10. Escribir la forma canónica de la ecuación de una elipse, si la suma de sus semiejes es igual a 10 y la distancia focal, $4\sqrt{5}$.

11. Verificar si los puntos $A(0; 2)$, $B(3; 0)$ y $C(1; 2)$ se hallan en la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

12. Dados una elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ y un punto en ella con abscisa igual a 3. Hallar su ordenada.

13. Escribir la ecuación canónica de una elipse que pase por el punto $A(3; \sqrt{2})$ y tenga el eje mayor $2a = 2\sqrt{15}$.

14. Una elipse con el centro en el origen de coordenadas y los focos en el eje Ox pasa por dos puntos A y B; escribir su ecuación si se dan:

1) $A(\sqrt{5}; \sqrt{6})$, $B(0; -2\sqrt{2})$; 2) $A(2\sqrt{5}; 2\sqrt{3})$, $B(-5; -3)$.

15. Hallar la longitud de una cuerda que pase por un foco y sea perpendicular al eje mayor de la elipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$.

16. Por el centro de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ se ha trazado una recta en sentido de la bisectriz del ángulo de coordenadas. Hallar la longitud del segmento de esta recta situado dentro de la elipse.

17. En la elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ se ha inscrito un triángulo regular, uno de cuyos vértices coincide con el vértice derecho de la elipse. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del triángulo.

18. Hallar los puntos de intersección de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ con las rectas:

1) $2x + 3y - 6 = 0$, 2) $2x + 3\sqrt{3}y = 12$, 3) $y = x - 6$.

19. La recta $2x + y - 14 = 0$ corta la elipse $4x^2 + y^2 = 100$. Hallar la longitud del segmento de esta recta situado dentro de la elipse.

20. Determinar la trayectoria de un punto M que, al desplazarse, conserva una distancia al punto $A(1; 0)$ igual a 1/3 de la que le separa de la recta $x = 9$.

21. Determinar la excentricidad de una elipse, si el segmento entre los focos se ve bajo un ángulo recto desde el extremo del eje menor.

22. Un segmento de recta se desplaza de modo que sus extremos resbalan por los ejes de coordenadas. Mostrar que, en este caso, todo punto del citado segmento describirá una elipse, excepto sus extremos y el punto medio.

§ 27. La hipérbola y su ecuación. *Se llama hipérbola el lugar geométrico de los puntos, el valor absoluto de cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos denominados focos es constante* (menor que la distancia entre los focos y no nula).

Por ejemplo, sean los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 de una hipérbola cuyos focos se hallan en los puntos F y F_1 (fig. 40). Entonces, conforme a la definición dada, puede escribirse:

$$|F_1M_1 - FM_1| = |F_1M_2 - FM_2| = |F_1M_3 - FM_3| = \\ = |F_1M_4 - FM_4| = \text{const.} \qquad (1)$$

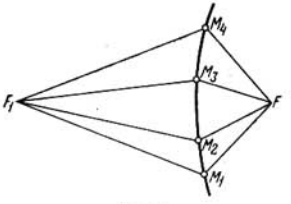


FIG. 40

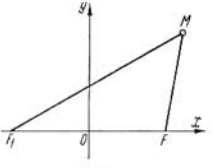


FIG. 41

Utilizando la definición de la hipérbola, deduzcamos su ecuación.

Tomemos por eje Ox la recta que pasa por los focos F_1 y F (fig. 41) y por Oy, la mediatriz del segmento FF_1.

Supongamos $FF_1 = 2c$, entonces las coordenadas de los focos serán

$$F(c;\ 0) \text{ y } F_1(-c;\ 0).$$

Tomemos en la hipérbola un punto cualquiera $M(x;\ y)$ y designemos por $2a$ la magnitud absoluta de la diferencia de distancias de todo punto a los focos; entonces

$$|F_1M - FM| = 2a,$$

ó

$$F_1M - FM = \pm 2a. \qquad (2)$$

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos, hallaremos:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$FM = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

y sustituyendo, en la igualdad (2), F_1M y FM por sus expresiones, anotaremos:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \qquad (3)$$

Esta es, precisamente, *la ecuación de la hipérbola* con relación al sistema de coordenadas elegido, por cuanto, conforme a las igualdades (1), es justa para todo punto de dicha curva.

Simplifiquemos la ecuación (3). Para ello, pasemos uno de los radicales al miembro derecho:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevemos ambos miembros al cuadrado:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2.$$

Eliminemos paréntesis:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 =$$

$$= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Reduzcamos términos semejantes:

$$2cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} - 2cx,$$

ó

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}.$$

Simplificando por 4 y elevando de nuevo al cuadrado ambos miembros de la ecuación, obtendremos:

$$(cx-a^2)^2 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2).$$

Eliminemos paréntesis:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

ó

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Pasemos a la izquierda los términos que contengan x e y, y los restantes, a la derecha:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

de aquí,

$$(c^2 - a^2)\, x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \qquad (4)$$

De acuerdo con la definición de la hipérbola

$$2c > 2a,$$

de donde

$$c > a. \qquad (5)$$

Conforme a la condición (5), la diferencia $c^2 - a^2$ tiene sólo valor positivo y, por lo tanto, puede designarse por b^2. Haciéndolo así en la igualdad (4), obtendremos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (6)$$

Dividiendo esta última entre a^2b^2, obtendremos definitivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7)$$

donde

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (8)$$

La igualdad (7) representa *la forma canónica de la ecuación de la hiperbola* *).

§ 28. Investigación de la ecuación de la hipérbola. De la ecuación (6) del § 27, tenemos:

$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2,$$

de aquí,

$$y^2 = \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2} = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}$$

y

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (1)$$

*) Al igual que en el caso de la elipse, puede mostrarse que la ecuación (7) es equivalente a la (3), es decir, no tiene raíces extrañas.

De esa misma ecuación (6) de § 27, hallamos:

$$x^2 = \frac{a^2y^2 + a^2b^2}{b^2} = \frac{a^2(y^2 + b^2)}{b^2}$$

y

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}. \qquad (2)$$

Investiguemos las ecuaciones (1) y (2) para esclarecer la forma geométrica de la hipérbola.

I. Hallemos los puntos de intersección de la hipérbola y el eje Ox. Con este propósito, supongamos $y = 0$ en la ecuación (2); obtendremos:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2} = \pm a.$$

De aquí se deduce: *la hipérbola corta el eje Ox en dos puntos cuyas coordenadas son* $(a; 0)$ *y* $(-a; 0)$ (fig. 42, puntos A y A_1).

II. En la ecuación (1), supongamos

$$|x| < a; \qquad (3)$$

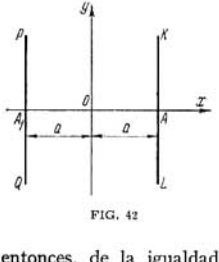


FIG. 42

entonces, y tendrá valor imaginario, y esto significa que la hipérbola no contiene puntos que satisfagan la condición (3). Por lo tanto, la franja entre las rectas $x = +a$ y $x = -a$ (rectas KL y PQ de la fig. 42) no contiene puntos de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

III. Sea

$$|x| > a; \qquad (4)$$

entonces, de la igualdad (1), hallaremos para todo x dos valores reales de y de igual magnitud absoluta y signo contrario. Mas esto quiere decir que a todo valor de x que satisfaga la inecuación (4) le corresponden, en la curva, dos puntos simétricos con relación al eje Ox.

Por lo tanto, *la hipérbola* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *es simétrica respecto al eje Ox.*

Por otra parte, para todo valor y de la igualdad (2) hallaremos dos valores reales de x de igual magnitud absoluta y signo contrario, es decir, a todo valor y le corresponden en la hipérbola dos puntos simétricos respecto al eje Oy.

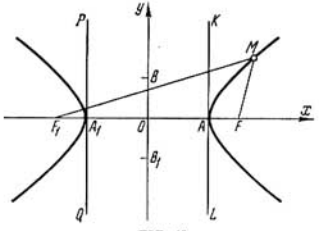


FIG. 43

Por consiguiente, *la hipérbola* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *es simétrica con relación al eje* Oy.

IV. Si, en la ecuación (1), se dan a x valores contenidos entre $+a$ y $+\infty$, entonces, la magnitud de y variará desde 0 hasta $\pm\infty$, es decir, en este caso, a todo valor de x le corresponden dos puntos en la curva, simétricos con relación al eje Ox y alejados entre sí a una distancia tanto mayor cuanto mayor sea la magnitud de la abscisa.

Si se dan a x valores entre $-a$ y $-\infty$, entonces y variará también de 0 a $\pm\infty$.

De todo lo dicho, se deduce que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ consta de dos ramas simétricas respecto al eje Oy, una de las cuales se halla a la derecha de la recta $x = +a$, y la otra, a la izquierda de la recta $x = -a$. Cada una de estas ramas es simétrica con relación el eje Ox (fig. 43).

Los puntos $A(a; 0)$ y $A_1(-a; 0)$ se denominan *vértices de la hipérbola*, y el punto $O(0; 0)$, *centro*.

El segmento $AA_1 = 2a$ se llama *eje real* o *transverso* de la hipérbola, a diferencia del segmento $BB_1 = 2b$, llamado eje *imaginario* o *no transverso* *.

*) El segmento $BB_1 = 2b$ se llama eje imaginario, por cuanto no contiene ningún punto de la hipérbola.

Los segmentos F_1M y FM son *los radios focales del punto M.*

§ 29. Excentricidad de la hipérbola. *Se llama excentricidad de la hipérbola la razón entre la distancia focal y la longitud del eje real, o sea,* $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

La excentricidad de la hipérbola, lo mismo que la de la elipse, se designa por la letra e:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Por cuanto para la hipérbola $c > a$ (§ 27), entonces

$$\frac{c}{a} > 1,$$

y, por ello, la excentricidad de la hipérbola es mayor que la unidad.

Conforme a la igualdad (8) de § 27

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

por esto, la fórmula (1) puede representarse en la siguiente forma:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

§ 30. Asíntotas de la hipérbola. Construyamos en los ejes de una hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

un rectángulo $LQRS$ con centro en el origen de coordenadas y lados iguales a $2a$ y $2b$; tracemos sus diagonales LR y QS, prolongándolas a ambos lados (fig. 44).

La recta LR pasa por el origen de coordenadas por lo que su ecuación será:

$$y = kx. \qquad (1)$$

Pero el coeficiente angular

$$k = \operatorname{tg} \sphericalangle LOA = \frac{AL}{OA} = \frac{b}{a}.$$

Sustituyendo, en la ecuación (1), k por su valor hallado, obtendremos la ecuación de la recta LR en la siguiente forma:

$$y = \frac{b}{a} x. \tag{2}$$

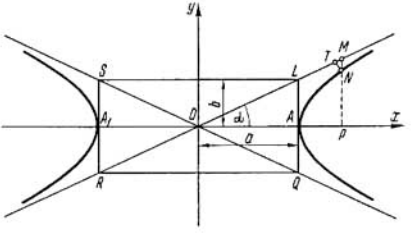


FIG. 44

La recta QS se define también por la ecuación (1), pero su coeficiente angular será otro, a saber:

$$k = \operatorname{tg} \sphericalangle AOS = \operatorname{tg}(180^\circ - \sphericalangle SOA_1) =$$

$$= \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}.$$

Así, pues, la ecuación de la recta QS será:

$$y = -\frac{b}{a} x. \tag{3}$$

Generalmente, las ecuaciones (2) y (3) se anotan así

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{4}$$

Entre las rectas definidas por las ecuaciones (4) y la hipérbola existe una relación; establezcámosla:

Resolvamos por sustitución el sistema compuesto por las ecuaciones (4) y la de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Tendremos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2b^2} = 1,$$

$$x^2 - x^2 = a^2,$$

lo que es imposible, por cuanto $a \neq 0$. De esta manera, las rectas (4) y la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ carecen de puntos comunes, es decir, las rectas (4) no cortan la hipérbola.

En la recta LR y la hipérbola, tomemos los puntos M y N situados en el primer ángulo de coordenadas y que tengan la misma abscisa. PM es la ordenada del punto M; designémosla por Y a diferencia de la del punto N que designamos por y. De la ecuación (2), podemos anotar:

$$Y = \frac{b}{a}\, x.$$

De la ecuación de la hipérbola, tenemos:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Formemos la diferencia

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\,(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

y veamos cómo varía al crecer la abscisa. Para ello, multipliquemos y dividamos por $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ el miembro derecho de la última igualdad; obtendremos:

$$Y - y = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})\,(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} =$$

$$= \frac{b[x^2 - (x - a^2)]}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{b(x^2 - x^2 + a^2)}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} =$$

$$= \frac{ba^2}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Por lo tanto,

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \qquad (5)$$

Si, en la igualdad (5), la magnitud x crece infinitamente, entonces, el denominador del quebrado crecerá también infinitamente, y el quebrado disminuirá, aproximándose a cero. Así, pues, en el triángulo rectángulo MNT, la hipotenusa NM y, por consiguiente, el cateto NT tienden a cero. De lo dicho deducimos: *cuando la abscisa x tiende al infinito, la hipérbola se aproxima indefinidamente a la recta LR sin cortarla.*

Como las rectas LR y QS, así como los puntos de la hipérbola son simétricos con relación al eje Ox, se puede decir que también la parte de la hipérbola situada en el cuarto ángulo de coordenadas se aproxima indefinidamente a la recta QS sin cortarla.

La deducción hecha para la rama derecha de la hipérbola es también justa para la izquierda, gracias a esa misma simetría de las rectas (4) y de la hipérbola con relación a los ejes de coordenadas.

Las rectas

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

se llaman *asíntotas de la hipérbola.*

De lo dicho en el presente párrafo puede arribarse a la conclusión de que la hipérbola tiene todos sus puntos dentro de los ángulos verticales formados por las asíntotas. Esta circunstancia puede aplicarse en la construcción de una hipérbola cuando no se requiere representarla exactamente, sino sólo aproximadamente; para ello, es necesario trazar las asíntotas y una curva regular, aproximándola gradualmente a las primeras.

EJEMPLO. Dada la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Determinar si el punto $A(2; 1{,}5)$ se halla en cualquiera de sus asíntotas.

SOLUCIÓN. De la ecuación dada, tenemos:

$$a = \sqrt{16} = 4,$$

$$b = \sqrt{9} = 3.$$

Por lo tanto, las ecuaciones de las asíntotas serán:

$$y = \pm \frac{3}{4} x.$$

Por cuanto, conforme a la condición, el punto A se halla en el primer ángulo de coordenadas, entonces, sólo puede pertenecer a la asíntota definida por la ecuación

$$y = \frac{3}{4} x.$$

Sustituyendo x e y por las coordenadas del punto A, obtendremos la identidad

$$1{,}5 = \frac{3}{4} \cdot 2 = 1{,}5.$$

Por lo tanto, el punto A se halla en la asíntota indicada.

§ 31. Hipérbolas conjugadas. Si en la ecuación de una hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

se permutan x e y y a y b, obtendremos la ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

ó

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \qquad (2)$$

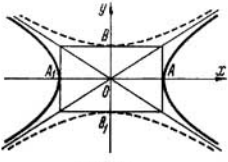


FIG. 45

La ecuación (2) define una hipérbola cuyos vértices se hallan en el eje Oy; por consiguiente, su eje real es $BB_1 = 2b$, y el imaginario $AA_1 = 2a$. La hipérbola definida por la ecuación (2) está representada en la fig. 45 con línea punteada.

Las hipérbolas (1) y (2) se llaman *conjugadas*. Las mismas tienen las asíntotas comunes.

§ 32. Hipérbola equilátera. Si en la ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

suponemos $a = b$, entonces tomará la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

ó

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$

La ecuación (1) define una hipérbola en la que los semiejes son iguales entre sí. Tal hipérbola se denomina *equilátera*. En este caso, las ecuaciones de las asíntotas serán

$$y = \pm x, \qquad (2)$$

por cuanto la razón

$$\frac{b}{a} = 1.$$

Como evidencia la ecuación (2), los coeficientes angulares de las asíntotas son iguales a $+1$ y -1. Si se designan por α y α_1, respectivamente, los ángulos que las asíntotas forman con el sentido positivo del eje Ox (fig. 46), entonces $\operatorname{tg} \alpha = 1$ y $\operatorname{tg} \alpha_1 = -1$, de donde

$$\alpha = 45° \text{ y } \alpha_1 = 135°.$$

Por consiguiente, el ángulo entre las asíntotas será:

$$\alpha_1 - \alpha = 135° - 45° = 90°.$$

De aquí deducimos: *las asíntotas de una hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí.*

§ 33. Ecuación de la hipérbola equilátera referida a las asíntotas. Por cuanto, las asíntotas de una hipérbola equilátera, son perpendiculares entre sí, se pueden tomar por ejes del sistema de coordenadas rectangulares y considerar la hipérbola en relación con estos nuevos ejes. Deduzcamos la ecuación de la hipérbola equilátera para este caso.

Sea dada una hipérbola equilátera. Entonces, su ecuación referida a los ejes Ox y Oy (fig. 47) se expresará, como se indicó en § 32, en la forma

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$

Ahora, tomemos las asíntotas de la hipérbola por ejes de coordenadas: OX, eje de abscisas y OY de ordenadas. Obtendremos un nuevo sistema de coordenadas rectangu-

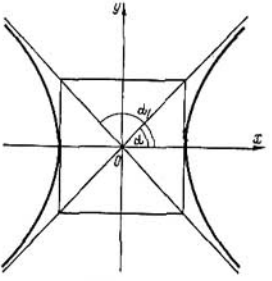


FIG. 46

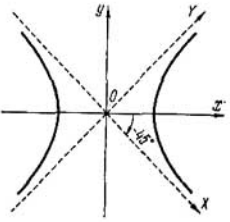


FIG. 47

lares XOY que podemos considerar formado mediante el giro de los antiguos ejes Ox y Oy alrededor del origen, formando un ángulo $\alpha = -45°$, en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.

Para obtener la ecuación de una hipérbola equilátera en el nueva sistema XOY, aplicamos las fórmulas (4) de § 8. Suponiendo en ellas $\alpha = -45°$, tendremos:

$$X = x \cos(-45°) + y \operatorname{sen}(-45°) =$$

$$= x \cos 45° - y \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \qquad (2)$$

$$Y = -x \operatorname{sen}(-45°) + y \cos(-45°) =$$

$$= x \operatorname{sen} 45° + y \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y). \qquad (3)$$

Multipliquemos entre sí las igualdades (2) y (3), y teniendo presente la (1), obtendremos:

$$XY = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}a^2. \qquad (4)$$

Suponiendo, para abreviar,

$$\frac{1}{2}a^2 = m,$$

transcribimos la igualdad (4) en la forma siguiente:

$$XY = m, \qquad (5)$$

donde m es una magnitud constante.

Tal es la ecuación de una hipérbola equilátera si sus asíntotas se toman por ejes de coordenadas.

Como evidencia la ecuación (5), las variables X e Y son inversamente proporcionales y, por ello, puede decirse que *la hipérbola equilátera* $xy = m$ *define el gráfico de dependencia inversamente proporcional entre variables.*

Ejercicios

1. Escribir la ecuación canónica de una hipérbola cuyos focos se hallen en el eje Ox si se dan:

1) $a = 6$, $b = 2$; 2) $a = 4$, $c = 5$; 3) $b = 5$, $c = 13$.

2. Dada la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. Determinar su eje y la distancia focal.

3. Hallar las coordenadas de los vértices y focos de la hipérbola $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

4. Escribir la ecuación de una hipérbola en la cual:

1) los focos tengan las coordenadas $(\pm 4; 0)$ y el eje real sea igual a 6;

2) los focos tengan las coordenadas $(0; \pm 5)$ y el eje real sea igual a 8.

5. Determinar las coordenadas de los focos, la longitud de los ejes y la excentricidad de la hipérbola:

1) $24x^2 - 25y^2 = 600$;

2) $16y^2 - 9x^2 = 144$.

6. Escribir la forma canónica de la ecuación de una hipérbola cuyos focos se hallen en el eje Ox, si se dan

1) $c = 7$, $e = \frac{7}{12}\sqrt{6}$; 2) $b = 9$, $e = 1{,}25$.

7. Escribir la forma canónica de la ecuación de una hipérbola cuyos focos se hallen en el eje Ox, si $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ y $c = 15$.

8. ¿Se hallan en la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$ los puntos siguientes: $A(8; 6\sqrt{3})$, $B(6; 3\sqrt{5})$ y $C(3; 2\sqrt{6})$?

9. Escribir la forma canónica de la ecuación de una hipérbola que pase por el punto $A(9; -4)$ si su semieje real $a = 3$.

10. Dos puntos $A(4; \sqrt{5})$ y $B(-4\sqrt{3}; 5)$ pertenecen a una hipérbola cuyos focos se hallan en el eje Ox. Escribir la ecuación elemental de la misma.

11. Escribir la ecuación de una hipérbola equilátera que pase por el punto:

1) $A(10; -8)$, 2) $A\left(\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3}\right)$.

12. Escribir la ecuación de las asíntotas y hallar la magnitud de la excentricidad de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 6$.

13. Escribir la ecuación de las asíntotas de una hipérbola si su eje real es igual a 8 y la distancia entre los focos, situados en el eje Ox, 10.

14. Escribir la ecuación de una hipérbola si la distancia entre los focos, situados en el eje Ox, es $10\,|\,\overline{2y}$ la ecuación de las asíntotas $y = \pm \frac{3}{4} x$.

15. Escribir la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas sean las rectas $y = \pm \frac{3}{5} x$ y cuyos focos tengan las coordenadas $(\pm 2; 0)$.

16. El punto $A(10; 4{,}5)$ se halla en una hipérbola que tiene el vértice en el eje Ox y una de cuyas asíntotas pasa por el punto $B(4; 3)$. Escribir la ecuación elemental de esta hipérbola.

17. Hallar el punto de intersección de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 18$ y la recta $x = 6$.

18. Hallar el punto de intersección de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 4$ y la recta $3x - 4y = 2$.

19. Hallar el ángulo agudo entre las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 5y^2 = 100$.

20. Hallar la excentricidad de una hipérbola si el ángulo entre las asíntotas es igual a 60°.

21. Determinar la trayectoria del punto $M(x; y)$ que, al desplazarse, se mantiene una distancia de la recta $x = 1$ igual a la mitad de la que le separa del punto $A(4; 0)$.

§ 34. La parábola y su ecuación canónica.

Se llama parábola el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto dado denominado foco y de una recta dada llamada directriz (a condición de que el foco no se halle en la directriz).

Sean los puntos M_1, M_2, M_3, M_4, situados en una parábola (fig. 48). Si el punto F representa el foco, y la recta AB, la directriz, entonces, conforme a la definición dada, podemos escribir:

$$FM_1 = M_1N_1, \qquad FM_2 = M_2N_2,$$

$$FM_3 = M_3N_3, \qquad FM_4 = M_4N_4.$$

Deduzcamos la ecuación de la parábola, aplicando su definición. Para ello, elijamos el sistema de coordenadas, tomando por eje Ox la recta trazada por el punto F (foco) perpendi-

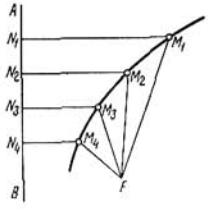


FIG. 48

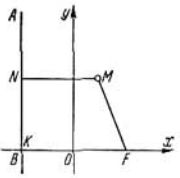


FIG. 49

cular a la directriz AB, y por eje Oy, la mediatriz del segmento KF (fig. 49).

Designemos

$$KF = p;$$

entonces, las coordenadas del foco F serán $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$. Tomemos en la parábola un punto cualquiera $M(x;\ y)$; sus distancias al foco F y a la directriz AB se expresarán, respectivamente, por los segmentos FM y MN. De acuerdo con la definición de la parábola, podemos escribir:

$$FM = MN. \tag{1}$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos y teniendo presente que el punto N tiene las coordenadas $\left(-\frac{p}{2};\ y\right)$, hallaremos:

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Sustituyendo FM y MN en la igualdad (1), por sus expresiones, obtendremos:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}. \qquad (2)$$

Esta es, precisamente, *la ecuación de la parábola* con relación al sistema de coordenadas elegido, por cuanto es justa para todo punto de dicha curva.

Simplifiquemos la ecuación (2). Para ello, elevemos ambos miembros al cuadrado:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Eliminemos paréntesis:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Reduciendo términos semejantes, obtendremos *la ecuación canónica de la parábola*

$$y^2=2px^{*)}. \qquad (3)$$

La magnitud p se llama *parámetro de la parábola*.

§ 35. Investigación de la ecuación de la parábola. De la ecuación (3) de § 34, hallamos:

$$y=\pm\sqrt{2px}. \qquad (1)$$

Investiguemos la ecuación (1) para establecer la forma geométrica de la curva cuando $p>0$.

I. Supongamos

$$x=0;$$

entonces

$$y=\pm\sqrt{2p\cdot 0}=0.$$

De aquí se deduce: *la parábola $y^2=2px$ pasa por el origen de coordenadas.*

*) Se puede mostrar que la ecuación (3) es equivalente a la (2).

II. Si $x < 0$, y es un número imaginario. Y esto significa que *la parábola* $y^2 = 2px$ *carece de puntos con abscisas negativas y, por tanto, se halla a la derecha del eje Oy.*

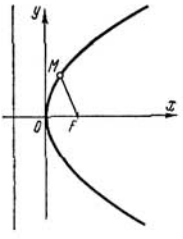


FIG. 50

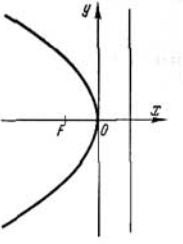


FIG. 51

III. Si $x > 0$, y tiene dos valores reales de igual magnitud absoluta, pero de signo contrario. Esto quiere decir que a todo valor positivo de x en la parábola le corresponden dos puntos simétricos respecto al eje Ox.

Por lo tanto, la parábola $y^2 = 2px$ *es simétrica con relación al eje Ox.*

IV. Si x crece sin fin, $|y|$ también crecerá sin fin, o sea, los puntos de la parábola, cuando se desplazan hacia la derecha del eje Oy, se alejan indefinidamente hacia arriba y hacia abajo del eje Ox.

Lo dicho permite representar la parábola como se muestra en la fig. 50.

El punto O se llama *vértice de la parábola*, el segmento FM, *radio focal del punto M de la parábola*, y la recta Ox es *su eje de simetría.*

Si la directriz se coloca a la derecha del origen de coordenadas, entonces, la parábola tendrá la posición mostrada en la fig. 51. Además, las abscisas de los puntos de la parábola satisfarán la condición $x \leqslant 0$, y, por ello, su ecuación tomará la forma

$$y^2 = -2px.$$

La parábola puede también ser simétrica con relación al eje Oy. En este caso, su foco se hallará en el eje de orde-

nadas y la directriz será paralela al eje Ox. Como se ve, al verificarse esta condición, los ejes de coordenadas intercambian sus papeles y la ecuación de la parábola tomará la forma

$$x^2 = 2py, \tag{2}$$

cuando la citada curva está dirigida hacia arriba (fig. 52), y

$$x^2 = -2py, \tag{3}$$

cuando lo está hacia abajo (fig. 53).

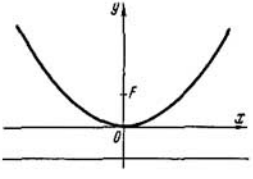


FIG. 52

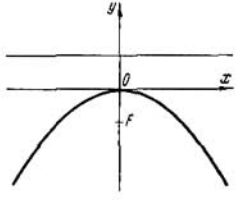


FIG. 53

EJEMPLO 1. Dada la parábola

$$y^2 = 12x.$$

Hallar las coordenadas de su foco y escribir la ecuación de la directriz.

SOLUCIÓN. La parábola dada es simétrica con relación al eje Ox y se halla a la derecha del Oy. De la ecuación, hallamos:

$$2p = 12;$$

de donde

$$p = 6.$$

La distancia del foco al origen de coordenadas es $\frac{p}{2}$; por esto, la abscisa del foco será $\frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Por lo tanto, el foco está en el punto $F(3; 0)$.

Como directriz sirve una recta paralela al eje Oy y distante del mismo $\frac{p}{2} = 3$. Por consiguiente, la ecuación de la directriz será $x = -3$.

EJEMPLO 2. El foco de una parábola con el vértice en el origen de coordenadas se halla en el punto $F(0; -4)$. Escribir la ecuación de esta parábola.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la condición, la parábola dada es simétrica con relación al eje Oy y está dirigida hacia abajo; por lo tanto, la ecuación buscada se determina a partir de (3). Como

$$\frac{p}{2} = 4,$$

entonces

$$p = 8$$

y la ecuación de la parábola será:

$$x^2 = -16y.$$

Ejercicios

1. Escribir las ecuaciones de cuatro parábolas con el vértice en el origen de coordenadas, sabiendo que las coordenadas de los focos son:

1) $F(4; 0)$, 2) $F(-2; 0)$, 3) $F(0; 3)$, 4) $F(0; -5)$.

2. Determinar las coordenadas de los focos de las siguientes parábolas:

1) $y^2 = 10x$, 2) $y^2 = -12x$, 3) $x^2 = 8y$, 4) $x^2 = -10y$.

3. Hallar las coordenadas del foco de la parábola $2y^2 - 5x = 0$.

4. Escribir la ecuación de la directriz y determinar las coordenadas del foco de cada una de las parábolas:

1) $y^2 = 4x$, 2) $x^2 = -8y$.

5. Escribir las ecuaciones de las parábolas con el vértice en el origen de coordenadas y cuyas directrices sean las rectas:

1) $x = -2$, 2) $x = 3$, 3) $y = 2{,}5$, 4) $y = -4$.

6. La recta $2x + 5 = 0$ sirve de directriz de una parábola con el vértice en el origen de coordenadas. Escribir la ecuación y determinar las coordenadas del foco de dicha parábola.

7. Verificar si

1) el punto $A(2; -2)$ se halla en la parábola $y^2 = 2x$,

2) el punto $B(-1; \sqrt{5})$ está en la parábola $y^2 = 5x$.

8. Del orificio de un tanque situado en la superficie de la tierra, sale un chorro de agua en forma de arco de una parábola definida por la ecuación $x^2 = -6y$, si el orificio se toma por origen de coordenadas y el eje Oy está dirigido en sentido vertical hacia arriba. ¿A qué distancia del borde del tanque cae el chorro a tierra, si el orifico se halla a una altura de 1,5 m?

9. Hallar la altura del arco de un puente de 24 m de largo, si dicho arco tiene forma de una parábola definida por la ecuación $x^2 = -48y$.

10. Una bomba de incendios lanza un chorro de agua que describe una trayectoria parabólica con parámetro $p = 4$. Determinar la altura del chorro si cae a 24 m del lugar de salida.

11. La sección obtenida en un reflector al cortarlo por un plano que pase por su eje es una parábola. Escribir su ecuación si el reflector tiene 30 cm de ancho y 20 cm de profundidad (su eje coincide con el Ox).

12. Un rayo incide en un espejo parabólico paralelamente al eje óptico principal y se refleja en el punto $A(1; 4)$ del espejo. Hallar la ecuación del rayo reflejado si la sección axial del espejo es una parábola definida por $y^2 = 16x$.

13. Escribir la ecuación de una parábola que tenga el vértice en el origen de coordenadas, sea simétrica con relación al eje Ox y pase por el punto $A(4; -2)$.

14. Escribir la ecuación de una parábola con el vértice en el origen de coordenadas, simétrica con relación al eje Oy y que pase por el punto $A(-4; -2)$.

15. Por el foco de la parábola $y^2 = 10x$ se ha trazado una cuerda perpendicular a su eje. Hallar la longitud de la cuerda.

16. En la parábola $y^2 = 5x$, hallar los puntos cuyas abscisas y ordenadas sean iguales.

17. Por el foco de la parábola $y^2 = 8x$ y un punto de ella cuya abscisa es igual a 4,5 y la ordenada positiva, se ha trazado una secante. Escribir su ecuación.

18. Hallar el punto de intersección de la parábola $y^2 = 9x$ con las rectas:

1) $y = 2x + 1$, 2) $2y - 3x - 3 = 0$, 3) $y = 3x + 1$.

19. Hallar la longitud de la cuerda común de dos parábolas:

$$y^2 = 4x \quad \text{y} \quad x^2 = 4y.$$

20. Por el foco de la parábola $y^2 = -4x$ se ha trazado una recta que forma un ángulo de 135° con el sentido positivo del eje Ox. Escribir la ecuación de la recta y hallar la longitud de la cuerda formada.

§ 36. Ecuación de la parábola con vértice desplazado.

I. Examinemos una parábola cuyo vértice no se halle en el origen de coordenadas, sino en cualquier otro punto del plano, por ejemplo, en el punto $O_1(a; b)$ (en el sistema de coordenadas rectangulares xOy). Sea el eje de simetría de esta parábola paralelo al eje Oy y la misma esté dirigida

hacia arriba (fig. 54). Hagamos el traslado paralelo de los ejes Ox y Oy, colocando el origen O en el punto O_1 $(a; b)$. Obtendremos un nuevo sistema de coordenadas XO_1Y, con relación al cual la ecuación de la parábola examinada tendrá la forma [§ 35, (2)]

$$X^2 = 2pY. \qquad (1)$$

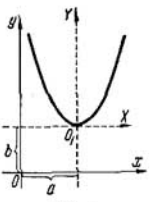


FIG. 54

Ahora, expresemos las nuevas coordenadas X e Y por las anteriores x e y; para ello, en la ecuación (1) sustituyamos X e Y por sus valores tomados de las fórmulas (2) del § 8; obtendremos:

$$(x - a)^2 = 2p(y - b). \qquad (2)$$

La ecuación (2) define una parábola dirigida hacia arriba, con el vértice en el punto O_1 $(a; b)$ y el eje de simetría paralelo al Oy.

Si una parábola con el vértice en ese mismo punto O_1 está dirigida hacia abajo, entonces, razonando igual, hallaremos su ecuación

$$(x - a)^2 = -2p(y - b). \qquad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) pueden expresarse por una igualdad de la forma siguiente:

$$(x - a)^2 = \pm 2p(y - b). \qquad (4)$$

Las ecuaciones (4) se pueden transcribir de otra forma, para lo que es necesario efectuar las transformaciones siguientes.

De (4), hallamos:

$$(y - b) = \pm \frac{1}{2p}(x - a)^2.$$

Designando

$$\pm \frac{1}{2p} = A, \qquad (5)$$

obtendremos:

$$y - b = A(x - a)^2,$$

6

$$y = Ax^2 - 2Aax + Aa^2 + b. \tag{6}$$

Suponiendo en la ecuación (6)

$$-2Aa = B, \tag{7}$$

$$Aa^2 + b = C, \tag{8}$$

la transcribimos en la forma

$$y = Ax^2 + Bx + C. \tag{9}$$

Hemos obtenido otra forma de ecuación de una parábola con el vértice en cualquier punto del plano y el eje de simetría paralelo al Oy; además, conforme a las igualdades (5) y (4), la parábola está dirigida

hacia arriba, si $A > 0$,

hacia abajo, si $A < 0$.

Examinemos los casos particulares de esta ecuación.

Sea la abscisa del vértice de la parábola $a = 0$; entonces, también $B = 0$, como evidencia la igualdad (7). En este caso, la ecuación (9) tomará la forma

$$y = Ax^2 + C.$$

La ecuación obtenida define una parábola cuyo vértice se halla en el eje Oy que, al mismo tiempo, es el eje de simetría (fig. 55).

Supongamos que uno de los puntos de la parábola (distinto del vértice) se halle en el origen de coordenadas; entonces, las coordenadas (0; 0) deberán satisfacer a la ecuación (9). Sustituyendo en ella x e y por ceros, tendremos $C = 0$. En este caso, la ecuación (9) tomará la forma

$$y = Ax^2 + Bx$$

y definirá una parábola que pase por el origen de coordenadas (fig. 56). Suponiendo, en las igualdades (7) y (8),

$$a = 0 \text{ y } b = 0,$$

obtendremos

$$B = 0 \text{ y } C = 0.$$

Cuando se verifica esta condición, la ecuación (9) se transforma en la siguiente:

$$y = Ax^2$$

y definirá una parábola con el vértice en el origen de coordenadas.

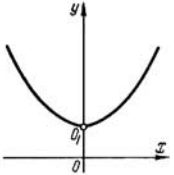


FIG. 55

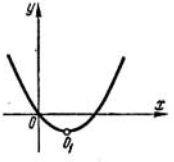


FIG. 56

De lo dicho se deduce que *una parábola cuyo eje de simetría sea paralelo al eje Oy o coincida con él se define por la ecuación*

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

para todo valor de A, B y C, excepto A = 0.

Mostremos con un ejemplo que también se verifica la afirmación inversa: *toda ecuación de la forma* (9) *define una parábola con eje de simetría paralelo al Oy.*

Sea dada la ecuación

$$y = 2x^2 - 4x - 3. \qquad (10)$$

Transformémosla del modo siguiente:

$$y = 2x^2 - 4x - 3 = (2x^2 - 4x + 2) - 5 =$$
$$= 2(x^2 - 2x + 1) - 5 = 2(x - 1)^2 - 5,$$

o

$$y + 5 = 2(x - 1)^2;$$

de aquí

$$(x - 1)^2 = \frac{1}{2}(y + 5),$$

o

$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}[y-(-5)].$$

Hemos obtenido una ecuación de la forma (2); por lo tanto, la ecuación (10) define una parábola con el vértice en el punto $(1; -5)$ y el eje de simetría paralelo al Oy.

II. De modo análogo puede determinarse la ecuación de una parábola que tenga el vértice en cualquier punto del plano O_1 $(a; b)$ y el eje de simetría paralelo al eje Ox. La ecuación de tal parábola tiene la forma

$y-b)^2 = 2p(x-a)$, si la parábola está dirigida hacia la derecha, (11)

$y-b)^2 = -2p(x-a)$, si lo está hacia la izquierda (12)

Uniendo ambas ecuaciones, tendremos:

$$(y-b)^2 = \pm 2p(x-a). \qquad (13)$$

Mediante transformaciones análogas a las que nos llevaron a deducir la ecuación (9), se puede dar otra forma a las ecuaciones (13), a saber:

$$x = A_1y^2 + B_1y + C_1. \qquad (14)$$

Dejemos que los estudiantes deduzcan individualmente las ecuaciones (13) y (14).

Observemos que tanto en las ecuaciones (4) y (9) como en las (13) y (14), una de las coordenadas (x o y) es sólo de primer grado y carece el producto xy.

EJEMPLO 1. Dada la ecuación de la parábola

$$x^2 - 6x + 8y - 15 = 0.$$

Hallar las coordenadas del vértice y el foco, así como las ecuaciones de su eje de simetría y la directriz.

SOLUCIÓN. La ecuación dada se puede transcribir así:

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{8}.$$

Como se ve, es una ecuación de la forma (9) y, por lo tanto, las coordenadas del vértice de la parábola dada pueden

obtenerse aplicando las igualdades (7) y (8). Sin embargo, resulta más cómodo hallarlas por el método utilizado para la ecuación (10). Efectuemos las necesarias transformaciones de la ecuación $x^2 - 6x + 8y - 15 = 0$; obtendremos:

$$x^2 - 6x + 8y - 15 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 8y - 15 =$$
$$= (x - 3)^2 + 8y - 24 = 0,$$

o

$$(x - 3)^2 = -8(y - 3).$$

Comparando la ecuación obtenida y la (3), hallaremos para la parábola dada:

las coordenadas del vértice O_1 (3; 3),

el parámetro $p = \frac{8}{2} = 4$,

el eje de simetría es paralelo al eje Oy,

la parábola está dirigida hacia abajo.

La abscisa del foco es igual a 3 (el foco y el vértice de la parábola se hallan en el eje de simetría paralelo al eje Oy, por eso sus abscisas son iguales entre sí); mientras que la ordenada del foco es igual a $3 - \frac{p}{2} = 3 - 2 = 1$ [el foco de la parábola se halla más abajo del vértice, a la distancia $\frac{p}{2}$ (§ 34)]. Así, pues, las coordenadas del foco $F(3; 1)$. La ecuación del eje de simetría $x = 3$ o $x - 3 = 0$. La directriz es paralela al eje Ox y se halla más arriba del vértice a la distancia $\frac{p}{2}$ (§ 34). Por lo tanto, la ecuación de la directriz es

$$y = 3 + \frac{p}{2} = 3 + 2 = 5 \text{ ó } y - 5 = 0.$$

EJEMPLO 2. Escribir la ecuación de una parábola cuyo vértice se halle en el punto O_1 (3; 2) y el foco en el $F(5; 2)$.

SOLUCIÓN. El vértice y el foco se hallan en una recta paralela al eje Ox (por cuanto sus ordenadas son iguales) y

la parábola está dirigida hacia la derecha (por cuanto la abscisa del foco es mayor que la del vértice); la distancia del foco al vértice $\frac{p}{2} = 5 - 3 = 2$, de donde $p = 4$.

Sustituyendo, en la ecuación (11), a, b y p por sus valores, obtendremos:

$$(y - 2)^2 = 8(x - 3),$$

o

$$y^2 - 4y - 8x + 28 = 0.$$

EJEMPLO. 3. Construir la parábola $y = x^2 - 4x$.

SOLUCIÓN. Empleemos el procedimiento habitual aplicado para trazar gráficos de funciones, a saber: calculemos los valores de las coordenadas de varios puntos y, luego, una vez construidos éstos, tracemos por ellos una línea regular.

Ante todo, hallemos las coordenadas del vértice de la parábola, empleando el mismo método que en los ejemplos anteriores:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 = y \text{ o } (x - 2)^2 = y + 4,$$

de donde O_1 $(2; -4)$.

Suponiendo $y = 0$ en la ecuación dada y resolviendo la obtenida, tendremos dos puntos en los que la parábola corta el eje Ox. Sus coordenadas son $(0; 0)$ y $(4; 0)$. Los tres puntos hallados son suficientes para la representación aproximada de la parábola. Para trazarla con más exactitud, se requiere mayor número de puntos. Formemos la siguiente tabla de valores de x e y

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Construyendo los puntos por las coordenadas calculadas y trazando por ellos una línea suave, obtendremos la parábola buscada (fig. 57).

EJEMPLO. 4. Construir la parábola $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$.

SOLUCIÓN. Para hallar las coordenadas del vértice O_1, representemos esta ecuación en la forma

$$x^2 - 2x + 2y + 2 = 0$$

y transformándola obtenemos:

$$(x^2 - 2x + 1) + 2y + 1 = 0 \text{ ó } (x-1)^2 = -2\left(y + \frac{1}{2}\right),$$

de donde

$$O_1\left(1; -\frac{1}{2}\right).$$

La parábola dada no corta el eje Ox, por cuanto las raíces de su ecuación son imaginarias. En este caso, es conveniente hallar el punto de intersección de la parábola y la recta $y = -1$ (-1 es el término independiente de la ecuación de la parábola).

Resolviendo para este fin el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2 + x - 1, \\ y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

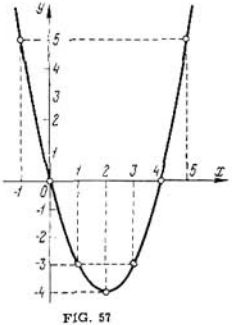


FIG. 57

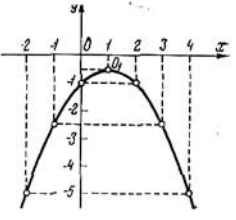


FIG. 58

hallaremos

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Así, pues, los puntos de intersección buscados son $(0;\ -1)$ y $(2;\ -1)$.

Agreguemos algunos puntos más a los tres hallados y confeccionemos la tabla de valores de x e y:

x	—2	—1	0	1	2	3	4
y	—5	—2,5	—1	—0,5	—1	—2,5	—5

La fig. 58 representa el gráfico de la parábola buscada.

Ejercicios

1. Hallar la ecuación de una parábola que pase por los puntos $M(1;\ 1)$, $N(2;\ 3)$ y $O(0;\ 0)$, sabiendo que su eje de simetría es paralelo al eje Oy.

2. Hallar la ecuación de una parábola que pase por los puntos $M(2;\ 0)$, $N(2{,}5;\ -2)$ y $P(4;\ 4)$, si se sabe que su eje de simetría es paralelo al Ox.

3. Una parábola con el vértice $O_1(1;\ 1)$ pasa por el punto $M(2;\ 0)$; además, su eje de simetría es paralelo al eje Oy. Escribir la ecuación de la parábola.

4. Una parábola con el vértice $O_1(0;\ -7)$ pasa por el punto $M(6;\ -1)$; además, su eje de simetría es paralelo al eje Ox. Escribir la ecuación de la parábola.

5. Una parábola, simétrica con relación al eje Ox, corta en éste un segmento igual a -4, y en el Oy, una cuerda igual a 8. Escribir la ecuación de la parábola.

6. Hallar las coordenadas del vértice, la magnitud del parámetro y la dirección de las parábolas:

1) $y^2 + 2y + 10x + 21 = 0$,

2) $x^2 - 6x - 4y - 11 = 0$.

7. Hallar las coordenadas del vértice y el foco, así como las ecuaciones del eje de simetría y la directriz de las parábolas:

1) $x^2 + 2x - 8y + 17 = 0$,

2) $x^2 - 8x + 8y + 8 = 0$.

3) $3y^2 + 6y - 5x + 13 = 0$,

4) $y^2 - 4x + 8 = 0$,

5) $x^2 + 4y - 8 = 0$.

8. Escribir las ecuaciones de las parábolas, si se conocen las coordenadas del vértice O_1 y del foco F:

1) $O_1\left(\frac{1}{2};\ -2\right)$, $F(2;\ -2)$,

2) $O_1(3;\ 0)$, $F(3;\ -3)$.

9. Escribir las ecuaciones de las parábolas, conociendo las coordenadas del vértice O_1 y la ecuación de la directriz:

1) $O_1(-3;\ 2)$, $x - 4 = 0$,

2) $O_1(4;\ 1)$, $y + 2 = 0$.

10. Escribir las ecuaciones de las parábolas, si se conocen las coordenadas del foco F y la ecuación de la directriz:

1) $F(4;\ -2)$, $y - 5 = 0$,

2) $F(-1;\ 2)$ $x - 3 = 0$.

11. Construir las parábolas:

1) $y = x^2 - 4$,

2) $y = x^2 - 3x$,

3) $y = x^2 - x - 2$,

4) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3}$,

5) $y = x^2 + 4x + 4$,

6) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$,

7) $y = 3x - \frac{3}{2}x^2 - 2$,

8) $y = x^2 + 4$.

§ 37. Secciones cónicas. Como hemos establecido en los párrafos precedentes, la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola se definen por ecuaciones de segundo grado; por este motivo, se las llama *curvas de segundo grado*. Las mismas eran ya conocidas por los antiguos griegos, quienes las estudiaron contemplándolas como resultado de la sección de un cono circular recto por un plano en los cuatro casos siguientes:

I. El plano secante es perpendicular al eje del cono; en la sección se obtiene *una circunferencia* (fig. 59).

II. El plano secante forma con el eje del cono un ángulo distinto de 90° y corta todas sus directrices del mismo lado del vértice S; en la sección se obtiene *una elipse* (fig. 60).

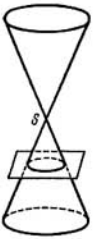


FIG. 59

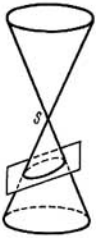


FIG. 60

FIG. 61

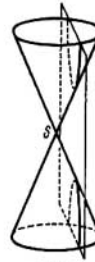


FIG. 62

III. El plano secante es paralelo a cualquier generatriz del cono; en este caso, se obtiene una curva denominada *parábola* (Fig. 61).

IV. El plano secante corta ambas hojas del cono; al hacerlo resultan dos ramas que forman *una hipérbola* (fig. 62).

La circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola reciben el nombre de *secciones cónicas*.

En la antigüedad, las secciones cónicas se estudiaron por vía geométrica exclusivamente, lo que presentó grandes dificultades, y sólo a partir de los tiempos de Descartes, quien ofreció el método de coordenadas su estudio se simplificó considerablemente.

Problemas mixtos

1. En la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 50 = 0$ se ha trazado una cuerda paralela al eje Oy a una distancia de 5 del mismo. Hallar la longitud de la cuerda.

2. En la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 180$ se ha tomado un punto con la abscisa igual a 10. Determinar su distancia a los focos de la hipérbola.

3. Las distancias de uno de los focos de una elipse a los extremos de su eje mayor son iguales a 7 y 1. Escribir la forma canónica de la ecuación de la elipse.

4. Escribir la ecuación de una circunferencia, uno de los diámetros de la cual tiene sus extremos en los puntos $A(-2; 1)$ y $B(0; 3)$.

5. Determinar la excentricidad de una hipérbola equilátera.

6. Escribir las ecuaciones de los diámetros de la circunferencia $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 16 = 0$, perpendiculares a los ejes de coordenadas.

7. Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 7 = 0$. ¿Qué dimensión tendrá el ángulo que la línea de centros de estas circunferencias forma con el sentido positivo del eje Ox?

8. La diferencia de los semiejes de una elipse es igual a 2 y las coordenadas de los focos son $(\pm 2\sqrt{6};\ 0)$. Hallar la ecuación de la elipse.

9. Los focos de una elipse se hallan en el eje Ox y dividen sus semiejes mayores por la mitad. Escribir la ecuación de esta elipse si su eje menor es igual a $4\sqrt{3}$.

10. En una elipse se ha inscrito la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ que corta el eje mayor en los focos, situados en el eje de abscisas. Escribir la ecuación de la elipse.

11. Hallar la magnitud de los ejes de una hipérbola, si la distancia focal es igual a 8 y el ángulo entre las asíntotas es recto.

12. Escribir la ecuación de una hipérbola que tenga focos comunes con la elipse $x^2 + 2y^2 = 18$ y cuya excentricidad sea igual a 1,5.

13. Hallar la longitud de una cuerda que pase por un foco y sea perpendicular al eje real de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

14. Hallar la longitud de una cuerda trazada por un foco perpendicularmente al eje mayor de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

15. Por el foco de una parábola $y^2 = 2px$ se ha trazado una cuerda perpendicular a su eje de simetría. Hallar la longitud de la cuerda.

16. En la hipérbola $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ se ha tomado un punto con la abscisa igual a 12. Hallar los radios focales de este punto.

17. Calcular la longitud de los lados de un triángulo regular inscrito en la parábola $y^2 = 4x$.

18. En la parábola $y^2 = 3x$ se ha tomado un punto cuya ordenada es igual a 2. Hallar la distancia de este punto al foco.

19. El semieje imaginario de una hipérbola cuyos focos se hallan en el eje Ox es dos unidades mayor que su semieje real; una de las asíntotas pasa por el punto $A(10;\ 14)$. Escribir la ecuación canónica de esta hipérbola.

20. Escribir la ecuación de una hipérbola, si sus asíntotas se definen por las ecuaciones $y = \pm \dfrac{3}{5} x$ y se sabe que dicha curva pasa por el punto $A(10;\ -3\sqrt{3})$.

21. La circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ pasa por los focos de una hipérbola que se hallan en el eje Ox. Escribir la ecuación de esta hipérbola si una de sus asíntotas forma con el sentido positivo del eje Ox un ángulo igual a arc tg 2.

22. En la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ se ha inscrito una elipse cuyos focos se hallan en el eje Ox. El radio de la circunferencia trazado a su punto $A(4;\ 3)$ se parte por la mitad por la elipse. Escribir la ecuación de esta última.

23. En la elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$ se ha inscrito un rectángulo cuyos dos lados opuestos pasan por los focos. Hallar la longitud de sus lados.

24. En la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ se ha inscrito un cuadrado. Hallar la longitud de sus lados.

25. Bajo la acción de cierta fuerza, el punto M se ha desplazado por la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$. La acción de la fuerza cesó en el momento en que el punto M coincidió con el punto $A(2; 1)$ de la circunferencia. Determinar la ulterior trayectoria del punto.

26. Dadas las ecuaciones de dos circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

Mostrar que su línea de centros es perpendicular a su cuerda común.

27. Una piedra, lanzada paralelamente al horizonte desde el tejado de una casa, cayó a tierra describiendo una parábola $x^2 = -5y$. ¿A qué distancia de la vertical cayó, si la altura de la casa era de 20 m?

28. Una parábola, simétrica respecto al eje Oy y con el vértice en el origen de coordenadas, corta la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ en los puntos situados en las cuerdas que pasan por sus focos perpendicularmente al eje mayor. Escribir la ecuación de la parábola.

29. Los radios focales de un punto de una elipse son iguales a 2,6 y 7,4; la cuerda que parte de este punto y es perpendicular al eje mayor es igual a 4,8 y se define por la ecuación $x - 3 = 0$. Escribir la ecuación de la elipse.

30. Una piedra, lanzada formando un ángulo agudo con el horizonte, describió un arco de parábola y cayó a 16 m de distancia de la posición inicial. Escribir la ecuación canónica de la parábola, sabiendo que la altura máxima de elevación de la piedra fue de 12 m.

31. El espejo parabólico del reflector del observatorio de Simeiz tiene 1,02 m de diámetro; la distancia de su foco al vértice es de 5 m. Hallar la profundidad de la cavidad parabólica que hubo de hacerse al fabricar el espejo de vidrio plano.

32. En la parábola $y^2 = 8x$ hallar un punto cuya distancia al foco sea 20.

33. Una parábola con el vértice en el origen de coordenadas es simétrica respecto al eje Ox. Determinar el radio focal de su punto $M(2; 4)$.

34. El radio focal del punto M de la parábola $y^2 = 12x$ es igual a 6. Hallar las coordenadas del punto M.

35. En la parábola $y^2 = 4{,}5x$ se ha tomado un punto M que se halla a la distancia 9,125 de la directriz. Determinar la distancia de este punto al vértice de la parábola.

36. Determinar la excentricidad de una elipse si la distancia focal es igual a la distancia entre los extremos de los ejes mayor y menor.

37. Hallar la excentricidad de una elipse en la que el eje mayor sea el triple del menor.

38. El meridiano terrestre representa, aproximadamente, una elipse, la razón entre cuyos ejes es 299 : 300. Determinar la excentricidad del citado meridiano.

39. La recta $x - 10 = 0$ corta una hipérbola y su asíntota en los puntos A y B, respectivamente. Escribir la ecuación de esta hipérbola si la ordenada del punto B es igual a 5 y la longitud del segmento de dicha recta situado dentro de la hipérbola es 8.

40. Los focos de una hipérbola se hallan en el eje Ox. Hallar el ángulo agudo que cada una de las asíntodas forma con el eje real, si la distancia de los vértices de la hipérbola a su centro es 2/3 de la distancia del foco al centro.

41. Dos vértices de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ se hallan en los focos de una hipérbola cuyos vértices se encuentran en los focos de la elipse dada Escribir la ecuación de la hipérbola.

42. Se ha trazado la secante $x-2y-3=0$ a la circunferencia $x^2+y^2-4x+3y+5=0$. Escribir la ecuación de los lados de un rectángulo inscrito en la circunferencia dada y uno de cuyos lados sea el segmento interior de la secante.

43. Hallar la distancia del centro de la circunferencia $x^2+y^2-6x-4y+5=0$ a la recta $2x+y-3=0$.

44. Del punto $C(5;\ 4)$ de la circunferencia $x^2+y^2-8y-9=0$ se ha bajado una perpendicular al diámetro AB, un extremo del cual se halla en el punto $B(3;\ 8)$. Hallar la longitud de dicha perpendicular.

45. Determinar las coordenadas del vértice y del foco de la parábola $y=x^2+6x$.

46. Una parábola es simétrica con relación al eje Ox; su vértice se halla en el punto $O_1(-5;\ 0)$, y corta, en el eje Oy, una cuerda igual a 12. Escribir la ecuación de esta parábola.

47. Calcular el parámetro de la parábola $y^2=2px$, si se sabe que la recta $x-2y+5=0$ es tangente a ella.

Elementos de cálculo diferencial y de cálculo integral

•

Capítulo V
Teoría de los límites

§ 38. Magnitud absoluta y correlaciones vinculadas a ella. En la posterior exposición del presente curso, nos veremos en la necesidad de analizar las correlaciones entre las magnitudes absolutas de ciertas expresiones.

La magnitud absoluta del número a se designa por $|a|$. Recordemos que conforme a la definición

$$|a| = a, \quad \text{si} \quad a \geqslant 0;$$
$$|a| = -a, \quad \text{si} \quad a < 0.$$

1. *La magnitud absoluta de una suma algebraica es menor o igual a la suma de las magnitudes absolutas de los sumandos.*

Por ejemplo:

a) $|2 + 4 + 6| = |12| = 12,$

$|2| + |4| + |6| = 2 + 4 + 6 = 12,$

por consiguiente, $|2 + 4 + 6| = |2| + |4| + |6|;$

b) $|-5 - 2| = |-7| = 7,$

$|-5| + |-2| = 5 + 2 = 7.$

por consiguiente, $|-5-2| = |-5| + |-2|$;

c) $|-5+2| = |-3| = 3,$

$|-5| + |2| = 5 + 2 = 7,$

por lo tanto, $|-5+2| < |-5| + |2|$.

2. *La magnitud absoluta de la diferencia de dos números es mayor o igual a la diferencia de las magnitudes absolutas del minuendo y el sustraendo.*

Por ejemplo:

a) $|7-9| = |-2| = 2,$

$|7| - |9| = 7 - 9 = -2,$

o sea, $|7-9| > |7| - |9|$;

b) $|9-7| = |2| = 2,$

$|9| - |7| = 9 - 7 = 2,$

es decir, $|9-7| = |9| - |7|$.

3. *La magnitud absoluta del producto de un número finito de factores es igual al producto de sus magnitudes absolutas.*

Por ejemplo:

$$|(-3)\cdot 5\cdot(-2)| = |30| = 30,$$

$$|-3|\cdot|5|\cdot|-2| = 3\cdot 5\cdot 2 = 30,$$

o sea, $|(-3)\cdot 5\cdot(-2)| = |-3|\cdot|5|\cdot|-2|$.

4. *La magnitud absoluta del cociente es igual al cociente de las magnitudes absolutas del dividendo y el divisor.*

Por ejemplo:

a) $\left|\frac{-15}{3}\right| = |-5| = 5,$

$$\frac{|-15|}{|3|} = \frac{15}{3} = 5,$$

o sea,
$$\left|\frac{-15}{3}\right| = \frac{|-15|}{|3|};$$

b) $$\left|\frac{-20}{-5}\right| = |4| = 4,$$

$$\frac{|-20|}{|-5|} = \frac{20}{5} = 4,$$

es decir,
$$\left|\frac{-20}{-5}\right| = \frac{|-20|}{|-5|}.$$

§ 39. Sucesión. Carácter de la variación de una variable. I. Sea dado un conjunto de números ordenado de determinada forma, por ejemplo:

$$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ 64;\ \ldots;\ 2^n;\ \ldots; \qquad (1)$$

entonces, a cada número de este conjunto se le puede hacer corresponder el número del lugar que ocupa.

Por ejemplo, 8 ocupa el tercer lugar; 32, el quinto; 64, el sexto, etc.

DEFINICIÓN. *Se llama sucesión numérica o, simplemente, sucesión el conjunto numerado de números ordenados en numeración creciente.*

El conjunto de números (1) es un ejemplo de sucesión.

Habitualmente, la forma general de anotación de una sucesión es la siguiente:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

donde u_n se denomina término general de la sucesión.

Conociendo la fórmula del término general de una sucesión, puede hallarse cualquier otro. Por ejemplo, el décimo de la sucesión (1)

$$u_{10} = 2^{10} = 1024.$$

EJEMPLO 1. Hallar el octavo término de la sucesión

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \ldots;\ \frac{n}{n+1};\ \ldots$$

SOLUCIÓN.

$$u_8 = \frac{8}{8+1} = \frac{8}{9}.$$

EJEMPLO 2. Hallar el séptimo término de la sucesión

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{8};\ \ldots;\ \frac{n}{2^n};\ \ldots$$

SOLUCIÓN.

$$u_7 = \frac{7}{2^7} = \frac{7}{128}.$$

II. Sabemos (§ 5) que en las matemáticas y sus aplicaciones se encuentran magnitudes constantes y magnitudes variables. En el eje numérico Ox (fig 63), a la constante a le corresponde un punto fijo A, y a la variable x, un punto M que se mueve hacia la derecha o la izquierda.

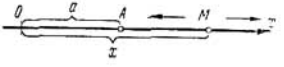


FIG. 63

Las variables pueden cambiar de forma muy diversa: crecer, decrecer, pasar del crecimiento al decrecimiento, etc. La ley de variación de una variable puede definirse por la sucesión de valores numéricos que toma. Sea, por ejemplo, la variable x que toma los valores numéricos de la sucesión (1). En este caso, la ley de variación consiste en que todo nuevo valor de la variable x es el doble del anterior.

Como se ve, en este ejemplo la variable cambia a saltos; sin embargo, con mucha frecuencia se examinan variables que cambian continuamente; por ejemplo, el tiempo, el camino que recorre un cuerpo, etc.

La variable que en el proceso de variación crece o decrece constantemente se llama *monótona*. En calidad de ejemplo de esta magnitud puede servir la variable que toma los valores (1).

Toda magnitud que varía de forma no monótona se denomina *oscilante*. Por ejemplo, la variable que cambia conforme a la ley de la sucesión

$$1;\ 2;\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{9};\ \frac{8}{9};\ \frac{8}{27};\ \ldots,$$

cuyos términos se duplican y se reducen a la tercera parte, alternativamente, es oscilante.

Las variables se dividen, además, por el carácter de la variación, en *acotadas* y *no acotadas*.

DEFINICIÓN. *La variable y se llama acotada si desde cierto valor de la misma se verifica la inecuación*

$$|y| < M,$$

donde M es cualquier número positivo constante.

Por ejemplo, tg x es una variable *acotada* en el intervalo de valores del argumento de $x = -45°$ a $x = 45°$, por cuanto en este caso $|\text{tg } x| \leqslant 1$.

Además de las variables acotadas, existen también otras que no satisfacen a la definición anterior. Tomemos, por ejemplo, tg x en el intervalo de valores del argumento de 0° a 90°. Por grande que sea el número positivo N que se tome, en el primer cuadrante se hallará un arco x para el cual tg $x > N$. Tal variable se denomina *no acotada*.

§ 40. Magnitud infinitesimal. Sea la variable α que toma sucesivamente valores:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \ldots \qquad (1)$$

o

$$-1;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{4};\ -\frac{1}{5};\ -\frac{1}{6};\ \ldots \qquad (2)$$

A medida que aumenta el número del lugar ocupado por los términos de estas sucesiones, disminuye la magnitud absoluta de α, y por pequeño que sea el número positivo ε que se tome, en cada una de las dos sucesiones se hallará un número desde el cual la magnitud absoluta de los valores de α será menor que ε. Sea, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}001$. A una distancia adecuada del comienzo de cada una de las suce-

siones dadas, hallaremos un número de magnitud absoluta menor que 0,001; además el valor absoluto de los términos que le siguen seguirá siendo inferior a dicha fracción. Si tomamos una fracción aún menor, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}0001$, entonces, tanto en la sucesión (1) como en la (2), si nos alejamos suficientemente de su comienzo, se hallará un término de valor absoluto menor que 0,0001; además, las magnitudes absolutas de los términos siguientes serán inferiores a 0,0001.

En este caso se dice que la magnitud α se aproxima indefinidamente a cero o, de otra forma, *tiende a cero*.

Este hecho se anota así:

$$\alpha \to 0.$$

El proceso geométrico de variación de la magnitud α que toma los valores de la sucesión (1), se puede representar mediante la variación de la abscisa del punto A que se desplaza por el eje de coordenadas en el sentido indicado por las flechas en la fig 64. Por pequeño que sea el número positivo que se tome, llegará un momento desde el cual y en adelante la abscisa del punto A será menor que el número tomado.

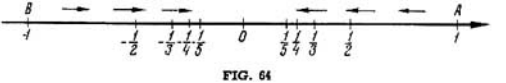


FIG. 64

El proceso de variación de la magnitud α que toma los valores de la sucesión (2) se representará mediante la variación de la abscisa del punto B que se desplaza por el eje de coordenadas en el sentido indicado en la fig. 64. También en este caso, el valor absoluto de la abscisa del punto B llegará a ser y, en adelante, continuará siendo menor que un número positivo prefijado, por pequeño que éste sea.

DEFINICIÓN. *La variable α se denomina infinitesimal si varía de forma que por pequeño que sea un número positivo ε tomado, $|\alpha|$ llega a ser y, al continuar variando el valor de α, seguirá siendo menor que ε.*

No debe confundirse magnitud infinitesimal y magnitud ínfima. Por ejemplo, al comparar la longitud de 1 cm con la distancia de la Tierra al Sol (150 000 000 km), la primera

se puede considerar ínfima con relación a la segunda, pero no puede llamarse infinitesimal, por cuanto su valor no varía, *mientras que la infinitesimal es una magnitud variable.*

Como se evidencia, ninguna magnitud constante puede ser infinitesimal, por cuanto, en valor absoluto, no puede llegar a ser menor que cualquier magnitud prefijada tan pequeña como se quiera. No obstante, cero es una excepción de todas las magnitudes constantes; cero es siempre menor que todo número positivo por pequeño que éste sea. Por ello, se incluye en las magnitudes infinitesimales.

EJEMPLO 1. La variable $\alpha = \frac{1}{2^n}$, *cuando*

$$n = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ldots$$

recibe los valores:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ldots$$

Por pequeño que sea el número positivo que se tome, en esta sucesión, se hallará un número menor que el tomado. Sea, por ejemplo, el quebrado $\frac{1}{1\,000}$ Cuando $n = 10$ obtendremos:

$$\alpha = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\,024} < \frac{1}{1\,000}.$$

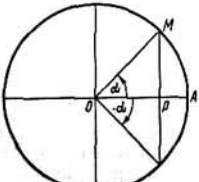


FIG. 65

Así, pues, la variable $\alpha = \frac{1}{2^n}$, cuando n toma los valores indicados, es una magnitud infinitesimal.

EJEMPLO 2. Tomemos una circunferencia de radio igual a la unidad (fig. 65). Designemos el ángulo AOM en radianes por α, obtendremos:

$$sen\ \alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{1} = PM.$$

Mas, como se evidencia de la figura,

$$PM < \cup AM$$

ó

$$PM < \alpha.$$

Por ello

$$\operatorname{sen} \alpha < \alpha.$$

Si α se aproxima indefinidamente a cero, tanto más sen α tiende a cero. Por consiguiente, sen α, cuando $\alpha \to 0$, es una magnitud infinitesimal.

Obtendremos esta misma conclusión si el ángulo es negativo $-\alpha$. En este caso, cuando $\alpha \to 0$, la magnitud absoluta de sen $(-\alpha)$ también tiende a cero y, por lo tanto, sen $(-\alpha)$, cuando $\alpha \to 0$, es una magnitud infinitesimal.

EJEMPLO 3. La presión p de un gas y su volumen v están relacionados por la dependencia funcional

$$p = \frac{c}{v},$$

donde $c = \text{const}$. Como se ve, al aumentar el volumen v, disminuye la presión p. Si el volumen v se aumenta infinitamente, la presión p disminuirá infinitamente. Por pequeño que sea el número positivo ε que se tome, podrá tomarse una magnitud de v tan grande que el quebrado $\frac{c}{v}$ llegue a ser menor que ε. Por lo tanto, la presión p de un gas es una magnitud infinitesimal si su volumen v crece sin fin.

§ 41. Magnitud infinitamente grande. Sea una variable y que toma sucesivamente los valores:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ \ldots \qquad (1)$$

$$-2;\ -4;\ -6;\ -8;\ -10;\ -12;\ \ldots \qquad (2)$$

Como se ve, al aumentar el número correspondiente al lugar ocupado por los términos de estas sucesiones, crece la magnitud absoluta de y. Supongamos que este proceso de crecimiento transcurre sin fin; entonces, dado un número positivo arbitrario N, tan grande como se quiera, en cada una de las indicadas sucesiones se hallará un término desde el cual y en adelante todos los términos serán mayores que N en valor absoluto. Demos, por ejemplo, $N = 1000$. En las sucesiones (1) y (2) hallaremos un número cuya magnitud absoluta es mayor que 1000; además, las magnitudes absolutas de los términos que le siguen son también mayores que 1000.

La variación geométrica de la magnitud de y puede representarse a través de la variación de la abscisa de un punto que se aleja al infinito por el eje de coordenadas (fig. 66):

en el primer caso, hacia la derecha del origen O,

en el segundo " , hacia la izquierda " " "

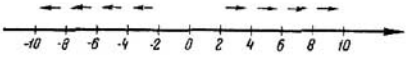


FIG. 66

DEFINICIÓN. *La variable y se llama infinitamente grande, si varía de forma que dado un número positivo arbitrario N, tan grande como se desee, $|y|$ llega a ser y, al continuar variando la magnitud de y, sigue siendo mayor que N.*

No debe confundirse magnitud infinitamente grande con número muy grande, por cuanto este último es constante, mientras que la primera es variable.

Si y es una cantidad infinitamente grande, se anota

$$y \to \infty$$

y se lee: "y tiende al infinito".

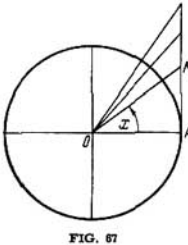


FIG. 67

Es necesario recordar que el símbolo de infinito no expresa un número determinado, sino que sólo indica el carácter de la variación de la variable, precisando, su crecimiento sin fin.

EJEMPLO 1. Examinemos la variación de la variable $y = \operatorname{tg} x$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}$. Tomando una circunferencia de radio $R = 1$ (fig. 67), podemos escribir:

$$\operatorname{tg} x = \frac{AM}{R} = \frac{AM}{1} = AM.$$

Si el arco x, al hallarse en el primer cuadrante, se aproxima a $\frac{\pi}{2}$, entonces, AM y, por consiguiente, $\operatorname{tg} x$ crecerán sin fin. En efecto, por grande que sea el número positivo N que

tomemos, en el primer cuadrante se hallará un arco cuya tangente será mayor que N y, por lo tanto, tg x seguirá siendo mayor que N si el arco aumenta.

Así, pues, tg x cuando $x \to \frac{\pi}{2}$ es una cantidad infinitamente grande.

EJEMPLO 2. La variable $y = \frac{1}{x}$

$$\text{cuando } x = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots;$$

toma, correspondientemente, los valores:

$$1; 2; 3; 4; 5; \ldots$$

Si x disminuye indefinidamente ($x \to 0$), entonces, y crece sin fin, es decir, será una magnitud infinitamente grande, por cuanto dado un número positivo arbitrario N, tan grande como se quiera, se hallará un valor de x tan pequeño que se verifique $y > N$. Sea, por ejemplo, $N = 1000$. Entonces, tomando $x = \frac{1}{1001}$, obtendremos $y = 1001 > N$.

Para dar la interpretación geométrica de la magnitud infinitamente grande que acabamos de examinar, recordemos que la ecuación $y = \frac{x}{1}$ cuando x tiene valores positivos define la rama de una hipérbola equilátera situada en el primer ángulo de coordenadas (fig. 68). La figura evidencia que, cuando la abscisa del punto M se aproxima indefinidamente a cero, el valor de su ordenada crece sin fin, o sea, es una magnitud infinitamente grande.

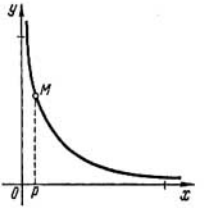


FIG. 68

§ 42. Relación entre la magnitud infinitesimal y la infinitamente grande. Entre las magnitudes infinitesimal e infinitamente grande existe una relación a saber:

si y es una magnitud infinitamente grande, su inversa es infinitesimal,

si α es una magnitud infinitesimal distinta de cero, su inversa $\frac{1}{\alpha}$ es infinitamente grande.

Sin demostrar estas afirmaciones, esclarezcámoslas sobre ejemplos.

1. Sea y una magnitud infinitamente grande que toma los valores:

$$1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ \ldots \to \infty;$$

entonces $\frac{1}{y}$ recibirá, correspondientemente, los valores:

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots \to 0,$$

o sea, será una magnitud infinitesimal.

2. Sea α una magnitud infinitesimal que toma los valores:

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots \to 0;$$

entonces, $\frac{1}{\alpha}$ tomará, respectivamente, los valores:

$$1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ \ldots \to \infty,$$

es decir, será una magnitud infinitamente grande.

§ 43. Concepto de límite de una variable. Sea la variable x que se aproxima indefinidamente a 3, tomando los valores:

$$3{,}1;\ 3{,}01;\ 3{,}001;\ 3{,}0001;\ \ldots$$

ó

$$2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999;\ 2{,}9999;\ \ldots$$

En estos casos, la magnitud absoluta de la diferencia $x - 3$ tiende a cero. En efecto, con los valores indicados de la variable x

$$|\, x - 3 \,| = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots \to 0,$$

o sea, la diferencia $x - 3$ es una magnitud infinitesimal.

El número 3 de nuestro ejemplo se denomina *límite de la variable x.*

El límite se designa con el símbolo lím. De esta manera, en nuestro caso podemos escribir:

$$\text{lím } x = 3.$$

Se utiliza también la anotación $x \to 3$.

DEFINICIÓN. *La constante a se llama límite de la variable x, si la diferencia entre ellas es una magnitud infinitesimal* α es decir, lím $x = a$, si $x - a = \alpha$.

Sobre la base de esta definición, puede anotarse:

$$x = a + \alpha. \tag{1}$$

De aquí se deduce que el límite de una magnitud infinitesimal es igual a cero, o sea,

$$\text{lím } \alpha = 0.$$

Si la variable x crece sin fin, entonces se dice que tiende al infinito; en este caso se escribe:

$$\text{lím } x = \infty$$

EJEMPLO 1. En el triángulo ABC (fig. 69), supongamos

$$\sphericalangle ACB = x, \quad \sphericalangle BCD = \alpha;$$

entonces

$$x + \alpha = 2d,$$

de donde

$$2d - x = \alpha, \tag{2}$$

Si el vértice B se desplaza uniforme e ininterrumpidamente por una recta paralela a AD, los ángulos x y α se convertirán en variables; además, α será una infinitesimal. De este modo, en la igualdad (2) la diferencia entre la constante $2d$ y la variable x tiende a cero y, por lo tanto, conforme a la definición de límite

$$\text{lím } x = 2d.$$

EJEMPLO 2. En una circunferencia se ha inscrito un polígono regular de n lados (fig. 70)

Designando

$$AB = a_n, \quad OA = R \quad \text{y} \quad OK = h_n,$$

del triángulo AOK tenemos:

$$OA - OK < AK$$

$$R - h_n < \frac{a_n}{2}. \tag{3}$$

Aumentemos indefinidamente el número de lados n de este polígono. Entonces h_n y $\frac{a_n}{2}$ se convertirán en variables; ade-

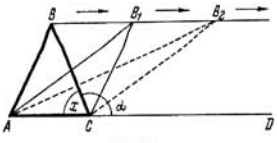


FIG. 69

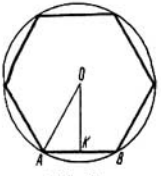


FIG. 70

más, $\frac{a_n}{2}$ será una infinitesimal. En efecto, el lado de un polígono regular de n lados

$$a_n < \cup AB = \frac{2\pi R}{n} = 2\pi R \cdot \frac{1}{n},$$

donde $2\pi R$ es la longitud de la circunferencia (véase § 46).

Cuando n crece sin fin, el quebrado $\frac{1}{n}$ es una magnitud infinitesimal (§ 40); $2\pi R$ es un factor constante. En el § 44 se mostrará que el producto de una constante por una infinitesimal es también una infinitesimal; por ello,

$$2\pi R \cdot \frac{1}{n} \to 0,$$

es decir, a_n y, por consiguiente, $\frac{a_n}{2}$ son magnitudes infinitesimales. De la inecuación (3) se desprende que, en este caso,

la diferencia $R - h_n$ será también una magnitud infinitesimal y, por lo tanto, de acuerdo con la definición de límite, tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} h_n = R.$$

Nota. Toda variable que tenga límite finito, incluida la infinitesimal, es una variable acotada.

§ 44. Propiedades de las magnitudes infinitesimales.

Primera propiedad. *El producto de una infinitesimal α por una constante a $(a \neq 0)$ es una magnitud infinitesimal.*

Para demostrarlo, tomemos un número positivo arbitrario ε. Como α es una magnitud infinitesimal, α al variar $|\alpha|$ puede llegar y en adelante ser menor que cualquier quebrado positivo y, por consiguiente, menor que $\frac{\varepsilon}{|a|}$, es decir desde cierto momento se verificará

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{|a|},$$

ó

$$|a\alpha| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, el producto $a\alpha$ es una magnitud infinitesimal.

Esta propiedad se verifica también en el caso $a = 0$, como se mostrará en este mismo párrafo.

EJEMPLO. Multiplicando la infinitesimal

$$\alpha = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots - 0$$

por -8, obtendremos

$$-8\alpha = -8;\ -0{,}8;\ -0{,}08;\ -0{,}008;\ \ldots \qquad (1)$$

El producto -8α es una magnitud infinitesimal, por cuanto si se toma un número positivo arbitrario ε, tan pequeño como se quiera, en la sucesión (1) se hallará un quebrado cuyo valor absoluto es menor que ε. Por ejemplo, la magnitud absoluta de -8α puede hacerse inferior a 0,0001; 0,00001; 0,000001; etcétera.

COROLARIO. *El producto de una variable acotada por una magnitud infinitesimal es una infinitesimal.*

Como la variable acotada es menor que cierta constante (§ 39), la propiedad que acabamos de demostrar para las magnitudes infinitesimales puede extenderse al caso del producto de una variable acotada por una infinitesimal.

Este corolario se verifica también para el producto de dos magnitudes infinitesimales, así como para el producto de cero por una infinitesimal, por cuanto las magnitudes infinitesimales son variables acotadas (nota del § 43) y cero es un caso particular de infinitesimal (§ 40).

Segunda propiedad. *La suma algebraica de dos infinitesimales* $\alpha + \beta$ *es una magnitud infinitesimal.*

Tomemos un número positivo arbitrario ε. Como α y β son magnitudes infinitesimales, entonces, $|\alpha|$ y $|\beta|$, cada una por separado, desde cierto momento y en adelante será menor que cualquier número positivo ε y hasta $\frac{\varepsilon}{2}$, es decir, a partir de determinado momento se verificará

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sumando estas inecuaciones, obtendremos:

$$|\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ó} \quad |\alpha| + |\beta| < \varepsilon.$$

Pero, basándose en el § 38, punto 1,

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Por ello, a partir de cierto momento se verificará

$$|\alpha + \beta| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, $\alpha + \beta$ es una magnitud infinitesimal.

EJEMPLO. Sumando dos magnitudes infinitesimales

$$\alpha = -2;\ -0{,}2;\ -0{,}002;\ \ldots \to 0$$

y

$$\beta = -14;\ -1{,}4;\ -0{,}14;\ -0{,}014;\ \ldots \to 0,$$

obtendremos:

$$\alpha + \beta = -16;\ -1{,}6;\ -0{,}16;\ -0{,}016;\ \ldots \qquad (2)$$

El resultado de la adición $\alpha + \beta$ es también una magnitud infinitesimal, por cuanto tomando un número positivo arbitrario ε, tan pequeño como se desee, entre los términos de la sucesión (2) se hallará un quebrado cuya magnitud abso-

luta es menor que ε; por ejemplo, $|\alpha + \beta|$ puede llegar a ser menor que 0,0001; 0,00001; 0,000001; etcétera.

Aplicando el método de inducción matemática es fácil demostrar que;

La suma algebraica de un número finito de infinitesimales es una magnitud infinitesimal.

Es necesario recordar que, en la formulación de esta propiedad, la finitud del número de sumandos es esencial. Si se requiere sumar un número infinitamente grande de magnitudes infinitesimales, puede no verificarse la citada propiedad. Sea dada, por ejemplo, una suma de n sumandos

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Si el número de estos sumandos crece sin fin, o sea $n \to \infty$, entonces, todo sumando $\frac{1}{n}$ es una magnitud infinitesimal, es decir $\frac{1}{n} \to 0$; sin embargo, la suma de tales infinitesimales sera $\frac{1}{n} \cdot n = 1$, que no es una magnitud infinitesimal.

§ 45. Teoremas de los límites.

TEOREMA 1. *Una variable no puede tener dos límites distintos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la variable x tiene dos límites distintos A y B. En este caso, conforme a la definición de límite (§ 43), la diferencia entre la variable y su límite debe ser infinitesimal, o sea

$$x - A = \alpha,$$

$$x - B = \beta,$$

donde α y β son magnitudes infinitesimales.

Restando de la primera igualdad la segunda, obtendremos:

$$x - A - x + B = \alpha - \beta,$$

o

$$\alpha - \beta = B - A.$$

El miembro izquierdo de esta igualdad, como diferencia de dos magnitudes infinitesimales, es una magnitud infinitesimal; mientras que el miembro derecho es una constante. Pero una infinitesimal puede ser igual a una constante sólo si esta última es cero (§ 40); por lo tanto, $B - A = 0$, de donde $A = B$, es decir, la variable tiene un límite.

COROLARIO. *Si dos variables que tienen límites son iguales en todas sus variaciones, sus límites son iguales también.*

En efecto, de acuerdo con lo demostrado cada una de las variables tiene un solo límite; mas por cuanto dichas variables son constantemente iguales, entonces tienden a una misma constante, es decir, tienen límites iguales.

TEOREMA II. *El límite de la suma de un número finito de variables que tienen límites es igual a la suma de los límites de estas variables.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos dos variables x e y cuyos límites son A e B, respectivamente, o sea

$$\begin{aligned} \lim\ x &= A, \\ \lim\ y &= B. \end{aligned} \tag{1}$$

De acuerdo con la definición de límite (§ 43), las diferencias $x - A$ e $y - B$, son infinitesimales, es decir,

$$x - A = \alpha,$$

$$y - B = \beta,$$

donde α y β son magnitudes infinitesimales.

Sumando estas dos igualdades, obtendremos:

$$(x + y) - (A + B) = \alpha + \beta.$$

El miembro izquierdo de esta igualdad representa la diferencia entre la variable $x + y$ y la constante $A + B$; mientras que el derecho es una magnitud infinitesimal (véase la segunda propiedad en el § 44). Por lo tanto, conforme a la definición de límite, tenemos:

$$\lim\ (x + y) = A + B.$$

Tomando en consideración la igualdad (1), podemos escribir:

$$\lim\ (x + y) = \lim\ x + \lim\ y.$$

Así mismo puede demostrarse este teorema para tres, cuatro y cualquier número finito de variables.

TEOREMA III. El límite de la diferencia de variables que tienen límites es igual a la diferencia de los límites de dichas variables.

Es sabido que la diferencia puede contemplarse como suma algebraica y, por ello, el teorema II puede extenderse también a ella.

TEOREMA IV. *El límite del producto de un número finito* de variables que tienen límites es igual al producto de los límites de estas variables.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos dos variables x e y cuyos límites son A y B, respectivamente, o sea

$$\lim x = A,$$

$$\lim y = B.$$

Según la definición de límite [(1) del 43], podemos escribir:

$$x = A + \alpha,$$

$$y = B + \beta,$$

donde α y β son magnitudes infinitesimales.

Multiplicando estas igualdades, obtendremos:

$$xy = AB + \beta A + \alpha B + \alpha\beta,$$

de donde

$$xy - AB = \beta A + \alpha B + \alpha\beta.$$

En el miembro izquierdo de la última igualdad tenemos la diferencia entre la variable xy y la constante AB; mientras que en el derecho todos los sumandos son magnitudes infinitesimales (véase la primera propiedad en el § 44) y, por lo tanto, su suma es también un infinitésimo (corolario de la 2ª propiedad, § 44). De este modo, la diferencia $xy - AB$ es una magnitud infinitesimal y, por lo tanto, conforme a la definición de límite,

$$\lim xy = AB$$

o

$$\lim xy = \lim x \lim y.$$

Este teorema puede demostrarse para todo número finito de factores variables.

COROLARIO 1. El límite del producto de una constante por una variable que tiene límite es igual al producto de la constante por el límite de la variable, o sea,

$$\lim ax = a \lim x,$$

donde a es constante y x variable.

Si a es constante, entonces, evidentemente,

$$\lim a = a.$$

Por eso, de acuerdo con el teorema IV obtendremos:

$$\lim ax = \lim a \lim x = a \lim x.$$

COROLARIO 2. *El límite de la potencia de una variable que tiene límite es igual al límite de la variable elevado a esa misma potencia, o sea,*

$$\lim x^m = (\lim x)^m.$$

En efecto, x^m puede representarse como producto de m factores iguales; entonces

$$\lim x^m = \lim (x \cdot x \cdot x \dots x) = \lim x \lim x \lim x \dots$$

$$\dots \lim x = (\lim x)^m.$$

El corolario deducido, como se demuestra en el curso detallado de análisis matemático, se verifica para todo valor real de m.

Aplicando esto puede mostrarse que *el límite de la raíz de una variable que tiene límite es igual a la misma raíz del límite de la variable, o sea,*

$$\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}.$$

En efecto, representando $\sqrt[m]{x}$ en forma de potencia $x^{\frac{1}{m}}$, obtendremos

$$\lim \sqrt[m]{x} = \lim x^{\frac{1}{m}} = (\lim x)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\lim x}.$$

TEOREMA V. *El límite del cociente de dividir dos variables que tienen límites es igual al cociente de la división de los límites del dividendo y el divisor, a condición que el límite del divisor no sea igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\lim x = A, \qquad \lim y = B, \tag{2}$$

además $B \neq 0$. Aceptemos sin demostración la existencia del límite $\frac{x}{y}$ en vista de la complejidad de esta cuestión; demostremos sólo que es igual al cociente de dividir los límites de x e y.

Supongamos

$$\frac{x}{y} = z, \tag{3}$$

de donde

$$x = yz.$$

Tomando en consideración que x, y y z tienen límites, apliquemos el teorema del límite del producto:

$$\lim x = \lim y \lim z,$$

o

$$A = B \lim z,$$

de donde

$$\lim z = \frac{A}{B}.$$

Conforme a las igualdades (2) y (3), tenemos:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$$

a condición que

$$\lim y \neq 0.$$

§ 46. Aplicación de la teoría de los límites al cálculo de la longitud de la circunferencia, el área del círculo y la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente indefinida. Inscribamos en una circunferencia cualquier polígono regular $ABCDEF$ (fig. 71) y dupliquemos su número de lados. Apliquemos el teorema acerca de que si un polígono

convexo está inscrito en otro, el perímetro del primero es menor que el del segundo; por lo tanto, el perímetro del polígono obtenido *AKBLCMDNERFS* será mayor por cuanto el primero está dentro del segundo.

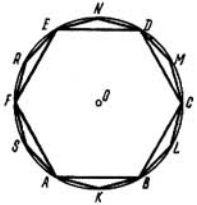


FIG. 71

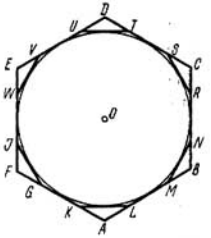


FIG. 72

Así, pues, *el perímetro de un polígono regular inscrito aumenta si aumenta su número de lados.*

Ahora, circunscribamos a la circunferencia un polígono regular *ABCDEF* (fig. 72) y dupliquemos su número de lados; obtendremos un polígono regular circunscrito *KLMN RSTUVWJG* cuyo perímetro será menor por cuanto se halla dentro del primero.

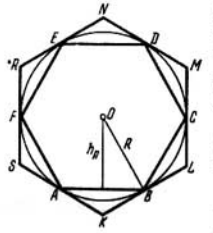


FIG. 73

Así, pues, *el perímetro de un polígono regular circunscrito disminuye si aumenta su número de lados.*

Longitud de la circunferencia. Sólo puede hallarse su valor aproximado. Mostremos cómo se hace.

En una circunferencia de radio R inscribamos un polígono regular *ABCDEF* y circunscribamos a la misma otro polígono homónimo *KLMNRS*, también regular (fig. 73). Al aumentar indefinidamente el número de lados n de estos polígonos, el perímetro P_n del inscrito crecerá, siendo siempre menor que el de todo polígono circunscrito, mientras que, en igualdad de condiciones, el perímetro Q_n del polígono cir-

cunscrito disminuirá, siendo siempre mayor que el de todo polígono inscrito. Dicho de otra forma, P_n es una variable acotada creciente monótona y Q_n, una variable acotada decreciente monótona (véase § 39). En los cursos detallados de análisis matemático se demuestra que tales variables poseen límite. Mostremos que los límites de las variables P_n y Q_n son iguales. Los polígonos representados en la fig. 73 son semejantes. Sabemos que la razón de los perímetros de los polígonos es igual a la razón de sus apotemas. Designando por h_n la apotema del polígono inscrito y teniendo presente que el radio R de la circunferencia sirve de apotema al circunscrito, conforme al citado teorema escribiremos:

$$\frac{Q_n}{P_n} = \frac{R}{h_n}.$$

Pasemos al límite de ambos miembros de esta igualdad cuando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{h_n}. \qquad (1)$$

Aplicando el teorema V del § 45 a la igualdad, (1), hallamos:

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} Q_n}{\lim\limits_{n\to\infty} P_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} R}{\lim\limits_{n\to\infty} h_n}. \qquad (2)$$

Pero $\lim\limits_{n\to\infty} R = R$ (como límite de una constante) y

$$\lim_{n\to\infty} h_n = R \text{(véase ejemplo 2 del § 43).}$$

Por eso, la igualdad (2) se transcribirá así:

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} Q_n}{\lim\limits_{n\to\infty} P_n} = \frac{R}{R} = 1,$$

de aquí

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} P_n.$$

Así, pues, P_n y Q_n tienen un límite común.

DEFINICIÓN. *Se llama longitud de la circunferencia el límite común de los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos cuyo número de lados aumenta indefinidamente*, o sea, $\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} P_n = C$, donde C es la longitud de la circunferencia.

Demostremos ahora que la *razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es constante para toda circunferencia.*

Tomemos dos circunferencias cuyos radios R y r e inscribamos en ellas polígonos regulares homónimos. Designando por P_n y p_n sus perímetros y por C y c la longitud de las circunferencias y tomando en consideración que la razón entre los perímetros de polígonos regulares homónimos es igual a la de los radios de las circunferencias a ellos, hallaremos:

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{r}.$$

Al aumentar indefinidamente el número de lados de estos polígonos, sus perímetros P_n y p_n devienen variables, mientras que los radios R y r son constantes. Pasemos al límite de ambos miembros de la igualdad (3) cuando $n \to \infty$; obtendremos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{r},$$

o, conforme al teorema del límite del cociente (§ 45),

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to\infty} p_n} = \frac{R}{r}. \qquad (4)$$

Pero, como se ha indicado anteriormente,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = C \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} p_n = c.$$

Por esto, la igualdad (4) se transcribe así:

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r} \quad \text{ó} \quad \frac{C}{c} = \frac{2R}{2r}.$$

Cambiando de lugar los términos medios de la proporción obtenida, tendremos:

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r} = \text{const.}$$

lo que era necesario demostrar.

La constante de la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro se designa por la letra griega π, o sea,

$$\frac{C}{2R} = \pi,$$

de donde

$$C = 2\pi R, \tag{5}$$

$$C = \pi D, \tag{6}$$

donde $D = 2R$ es el diámetro de la circunferencia.

Las igualdades (5) y (6) sirven de fórmulas para hallar la longitud de la circunferencia. En ellas, π es un número irracional, es decir, un número tal que sólo puede expresarse por una fracción decimal infinita no periódica. Redondeando hasta 0,0001

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

En las aplicaciones prácticas, el valor de π se redondea con frecuencia hasta 0,01, es decir,

$$\pi \approx 3{,}14.$$

Longitud de los arcos de la circunferencia. Como la longitud de una circunferencia de radio R es igual a $2\pi R$, la longitud de un arco suyo de 1° será $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$, y la de uno de $n°$, $\frac{\pi Rn}{180}$.

Designando por l la longitud del arco, tendremos:

$$l = \frac{\pi Rn}{180}. \tag{7}$$

Area del círculo. Definición. *Se llama área de un círculo el límite a que tiende el área de un polígono regular inscrito o circunscrito cuyo número de lados se duplica indefinidamente.*

En una circunferencia de radio R inscribamos un polígono regular $ABCDEF$ (fig. 74). Es sabido que el área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro por la apotema. Designando por S_n, P_n y h_n el área del polí-

gono dado, su perímetro y la apotema, respectivamente, anotaremos:

$$S_n = 1/2\ P_n h_n. \tag{8}$$

Dupliquemos indefinidamente el número de lados de este polígono y pasemos al límite de la igualdad (8) cuando $n \to \infty$.

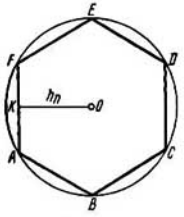


FIG. 74

Aplicando el teorema IV y el corolario I de este teorema (§ 45), tendremos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1/2 \lim_{n\to\infty} P_n \lim_{n\to\infty} h_n. \tag{9}$$

Pero, como ya sabemos,

$\lim_{n\to\infty} P_n = C$ (longitud de la circunferencia),

$\lim_{n\to\infty} h_n = R.$

Conforme a la definición, $\lim_{n\to\infty} S_n$ es el área del círculo; designándola por K, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = K.$$

Tomando en consideración lo expuesto, la igualdad (9) se transcribirá así:

$$K = 1/2\ CR.$$

Pero

$$C = 2\pi R.$$

Por tanto,

$$K = 1/2\ 2\pi R \cdot R = \pi R^2. \tag{10}$$

Sustituyendo el radio R por la mitad del diámetro $\frac{D}{2}$, tendremos:

$$K = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}. \tag{11}$$

Las igualdades (10) y (11) sirven de fórmulas para hallar el área del círculo.

COROLARIO. Sean dados dos círculos de radio R_1 y R_2 o diámetro D_1 y D_2.

El área del primer círculo $K_1 = \pi R_1^2$ ó $K_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$.

El área del segundo círculo $K_2 = \pi R_2^2$ ó $K_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$.

Dividiendo la primera área por la segunda, obtendremos:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \quad \text{ó} \quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{\pi D_1^2}{4} : \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{D_1^2}{D_2^2},$$

es decir, *la razón entre las áreas de dos círculos es igual a la de los cuadrados de sus radios o los cuadrados de sus diámetros.*

Área de un sector circular.

El área de un sector de un arco de 1° es igual a $\frac{\pi R^2}{360}$.

El área de un sector de un arco de $n°$ es igual a $\frac{\pi R^2 n}{360}$.

Designando por s el área del sector circular, obtendremos:

$$s = \frac{\pi R^2 n}{360}. \tag{12}$$

Dividamos en dos factores el miembro derecho de la fórmula (12), a saber:

$$s = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2}. \tag{13}$$

Pero

$$\frac{\pi R n}{180} = l \text{ [véase la formula (7)]},$$

por ello, la igualdad (13) puede transcribirse así:

$$s = \frac{lR}{2} \tag{14}$$

o sea, *el área de un sector circular es igual a la mitad del producto de la longitud del arco por el radio.*

Suma de los términos de una progresión geométrica decreciente indefinida. Del álgebra se sabe que la suma de los términos de una progresión decreciente

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad \text{donde} \quad |q| < 1.$$

Dividamos cada término del numerador por el denominador obtendremos:

$$s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}. \tag{15}$$

Supongamos que el número de términos de esta progresión decreciente crece sin fin. Pasemos al límite de la igualdad (15) cuando $n \to \infty$ y apliquemos el teorema III del § 45:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{1 - q} - \lim_{n \to \infty} \frac{aq^n}{1 - q}. \tag{16}$$

Sabemos que el límite de una constante es la propia constante, es decir, $\lim \frac{a}{1-q} = \frac{a}{1-q}$. De acuerdo con el corolario 1 del teorema IV del § 45, tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} \lim_{n \to \infty} q^n.$$

Mas $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$. Por tanto, la igualdad (16) puede transcribirse de la manera siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot 0 = \frac{a}{1 - q}.$$

Precisamente este límite se denomina *suma s de progresión geométrica decreciente indefinida*. Así, pues,

$$s = \frac{a}{1 - q}. \tag{17}$$

Conversión de una fracción decimal periódica en quebrado ordinario. Apliquemos la fórmula (17) a la conversión de una fracción decimal periódica en quebrado ordinario.

EJEMPLO 1. Convertir la fracción periódica $0,444\ldots =$ $= 0,(4)$ * en ordinaria.

SOLUCIÓN. Representemos la fracción dada en la forma siguiente:

$$0,444\ldots = 0,4 + 0,04 + 0,004 + \ldots$$

Hemos obtenido una progresión geométrica decreciente indefinida en la que el primer término $a = 0,4$ y el denominador $q = 0,1$. Conforme a la fórmula (17), la suma de sus términos será:

$$\frac{0,4}{1-0,1} = \frac{0,4}{0,9} = \frac{4}{9}.$$

EJEMPLO 2. Convertir la fracción periódica $0,353535\ldots =$ $= 0,(35)$ ** en ordinaria.

SOLUCIÓN. Transcribámosla en la siguiente forma:

$$0,353535\ldots = 0,35 + 0,0035 + 0,000035 + \ldots$$

Tenemos otra vez una progresión geométrica decreciente indefinida en la que $a = 0,35$; $q = 0,01$ y la suma de sus términos por la fórmula (17) será

$$\frac{0,35}{1-0,01} = \frac{0,35}{0,99} = \frac{35}{99}.$$

De este modo, la fracción periódica pura es igual a un quebrado ordinario que tiene por numerador un número igual al período y por denominador un número formado por tantas cifras iguales a 9 como cifras tiene el período.

EJEMPLO 3. Convertir la fracción periódica $0,5666\ldots =$ $= 0,5(6)$ *** en quebrado ordinario.

Representemos esta fracción de la forma siguiente:

$$0,5666\ldots = 0,5 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + \ldots$$

*) El número que se repite, 4, se llama período; con frecuencia se escribe entre paréntesis. Señalemos que el quebrado dado se denomina periódica *pura*, por cuanto el período comienza inmediatamente después de la coma.

**) Aquí, el número que se repite, 35, es también el período, y la fracción, periódica pura.

***) El quebrado dado se denomina fracción periódica *mixta*, por cuanto entre la coma y el período existe un número no perteneciente al período.

Los términos del miembro derecho de esta igualdad, a partir del segundo, constituyen una progresión geométrica decreciente indefinida en la que

$$a = 0{,}06, \quad q = 0{,}1$$

Aplicando la fórmula (17), tenemos:

$$\frac{0{,}06}{1-0{,}1} = \frac{0{,}06}{0{,}9} = \frac{6}{90}.$$

Toda la suma del miembro derecho es igual a

$$0{,}5 + \frac{6}{90} = \frac{5}{10} + \frac{6}{90} = \frac{5 \cdot 9 + 6}{90} = \frac{51}{90} = \frac{56-5}{90}.$$

EJEMPLO 4. Convertir la fracción periódica mixta

$0{,}3252525 \ldots = 0{,}3(25)$ en ordinaria.

SOLUCIÓN. Representemos esta fracción de la forma siguiente:

$$0{,}3252525 \ldots = 0{,}3 + 0{,}025 + 0{,}00025 + 0{,}0000025 + \ldots$$

En el miembro derecho de esta igualdad, desde el segundo término tenemos una progresión geométrica decreciente indefinida en la que

$$a = 0{,}025, \quad q = 0{,}01.$$

Por la fórmula (17), obtendremos:

$$\frac{0{,}025}{1-0{,}01} = \frac{0{,}025}{0{,}99} = \frac{25}{990}.$$

Y toda la fracción periódica será igual a

$$0{,}3 + \frac{25}{990} = \frac{3}{10} + \frac{25}{990} = \frac{3 \cdot 99 + 25}{990} = \frac{322}{990} = \frac{325-3}{990}.$$

De este modo, la fracción periódica mixta es igual a un quebrado ordinario cuyo numerador es la diferencia entre el número precedente al segundo período y el precedente al primero, y el denominador, un número formado por tantas cifras iguales a 9 como cifras tiene el período seguidas de tantos ceros como cifras sean la parte no periódica.

§ 47. Límite de una función. I. Sea dada la función

$$y = x^2 - 4. \qquad (1)$$

Se puede hablar de límite de una función sólo a condición de que se prefije el límite a que tiende su argumento x; sin ello, esta cuestión carece de sentido.

Supongamos que $x \to 3$; veamos si existe o no límite de la función dada cuando se verifica la susodicha condición, y si existe cuál es *.

En el § 43, al hablar del límite de una variable mostramos que ésta puede tender a su límite variando de distintos modos.

Si, en nuestro ejemplo, x toma la sucesión de valores:

$$3{,}1;\ 3{,}01;\ 3{,}001;\ 3{,}0001;\ \ldots \to 3;$$

entonces, la función (1) obtendrá sucesivamente los valores:

$$5{,}6;\ 5{,}06;\ 5{,}006;\ 5{,}0006;\ \ldots \to 5.$$

Vemos que la sucesión dada de valores de la función tiene por límite 5.

Si en la igualdad (1) damos al argumento los valores:

$$2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999;\ 2{,}9999;\ \to 3,$$

también en este caso el límite de la sucesión de valores de la función será 5, lo que se puede comprobar fácilmente haciendo los correspondientes cálculos.

Así pues, la función (1) tiene el límite igual a 5 cuando $x \to 3$. Esto se anota así:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 4) = 5.$$

Este procedimiento de hallar el límite de una función es dilatado, motivo por el que no se utiliza en la práctica. Los teoremas de los límites (§ 45), demostrados por nosotros, permiten simplificar la solución de este problema.

EJEMPLO 1. Hallar $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4)$.

*) En los cursos completos de análisis matemático se ofrece la definición del concepto de límite de una función. Debido a su complejidad no estimamos posible insertarla.

SOLUCIÓN. Aplicando el teorema III y el corolario 2 del teorema IV de los límites, obtendremos:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-4)=\lim_{x\to 3}x^2-\lim 4=(\lim_{x\to 3}x)^2-$$

$$-\lim 4=3^2-4=5.$$

Este límite es igual al hallado antes por nosotros para la función $y=x^2-4$ cuando $x\to 3$.

EJEMPLO 2. Hallar $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{2x+1}$.

SOLUCIÓN. Antes de aplicar el teorema del límite del cociente es necesario averiguar si el límite del denominador es nulo o no cuando $x\to 2$. Aplicando el teorema II y el corolario 1 del teorema IV de los límites, hallaremos:

$$\lim_{x\to 2}(2x+1)=2\lim_{x\to 2}x+\lim 1=2\cdot 2+1=5.$$

El límite del denominador no es cero; por tanto, el teorema V de los límites puede aplicarse a nuestra función. De este modo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}.$$

Pero

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x)=(\lim_{x\to 2}x)^2+3\lim_{x\to 2}x.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x}{2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim 1}=\frac{2^2+3\cdot 2}{2\cdot 2+1}=$$

$$=\frac{10}{5}=2.$$

Substituyendo x por su límite en las expresiones de las funciones de los últimos ejemplos, obtendremos los mismos resultados. En los cursos completos de análisis matemático se demuestra que esta sustitución es justa si los teoremas de los límites son aplicables a la función cuyo límite se busca.

A continuación utilizaremos este procedimiento, por cuanto acelera considerablemente el proceso de cálculo del límite de una función.

II. Analicemos ejemplos en los que el límite del divisor es nulo y, por lo tanto, el teorema del límite del cociente es inaplicable; en estas circunstancias, se pueden presentar dos casos.

a) El límite del dividendo no es cero.

EJEMPLO 3. Hallar $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3}{2x-6}$.

SOLUCIÓN. Hallemos el límite del divisor, sustituyendo x por su valor límite:

$$\lim_{x\to 3} (2x-6) = 2\cdot 3 - 6 = 0.$$

Como se evidencia, en este ejemplo no se puede utilizar el teorema del límite del cociente (la división entre 0 es imposible). Sabemos que si $\lim\limits_{x\to 3} (2x-6) = 0$, entonces $2x-6$ es una magnitud infinitamente pequeña y su inversa, una magnitud infinitamente grande (§ 42). Por este motivo $\dfrac{1}{2x-6}$ cuando $x \to 3$ y, en consecuencia, el producto $\dfrac{1}{2x-6}\cdot 3$ son magnitudes infinitamente grandes, es decir,

$$\lim_{x\to 3} \frac{3}{2x-6} = \infty.$$

b) El límite del dividendo es cero.

EJEMPLO 4. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x}{x^2+x}$.

SOLUCIÓN. El límite del divisor

$$\lim_{x\to 0} (x^2+x) = 0^2 + 0 = 0$$

y el límite del dividendo

$$\lim_{x\to 0} (x^2+2x) = 0^2 + 2\cdot 0 = 0.$$

En este caso, obtendremos la expresión $\dfrac{0}{0}$ que no tiene sentido.

Sin embargo, de ello no se deduce que la función dada carece de límite; para hallarlo, es necesario transformarla previamente, dividiendo el numerador y el denominador entre x, operación factible por cuanto antes de pasar al valor límite $x \neq 0$, o sea,

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} = \frac{x + 2}{x + 1}. \qquad (2)$$

El teorema del límite del cociente es aplicable a la expresión $\frac{x+2}{x+1}$, por cuanto el límite del divisor no es cero. Hallemos el límite del quebrado $\frac{x+2}{x+1}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = \frac{0+2}{0+1} = 2.$$

Teniendo presente la igualdad (2) y el corolario del teorema 1 del § 45, obtendremos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = 2.$$

Este resultado puede confirmarse también calculando los valores de la función cuando el argumento toma valores próximos a cero, por ejemplo, cuando

$$x = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001; \ldots$$

La tabla presentada a continuación muestra el carácter de la variación de la función

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} \text{ cuando } x \to 0:$$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\ldots \to 0$
$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x}$	1,9	1,99	1,999	1,9999	$\ldots \to 2$

EJEMPLO 5. Hallar $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

SOLUCIÓN. En este caso, los límites del dividendo y el divisor son nulos; por esto, es necesario transformar previamente la función simplificándola por $x - 3$, operación admisible por cuanto antes de pasar al valor límite

$$x - 3 \neq 0.$$

Así pues,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6.$$

EJEMPLO 6. Hallar $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$.

SOLUCIÓN. Lo mismo que en los ejemplos precedentes, es necesario transformar esta función. Con este propósito, eliminemos la irracionalidad del numerador multiplicando ambos términos de la fracción por $\sqrt{x + 3} + 2$ y efectuando las simplificaciones requeridas:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x + 3} - 2)(\sqrt{x + 3} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x + 3 - 4}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x + 3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3} + 2} = \frac{1}{4}.$$

III. Examinemos un ejemplo de determinación del límite de una función cuando $x \to \infty$.

EJEMPLO 7. Hallar $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{3x + 2}$.

SOLUCIÓN. El divisor $3x + 2$ cuando $x \to \infty$ crece sin fin, o sea, es una magnitud infinitamente grande; su inversa $\dfrac{1}{3x + 2}$ es una infinitesimal (§ 42). Por lo tanto, el producto $\dfrac{1}{3x + 2} \cdot 2$ tiende a cero si $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{3x + 2} = 0.$$

EJEMPLO 8. Hallar $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}$.

SOLUCIÓN. El dividendo y el divisor de esta función cuando $x \to \infty$ son magnitudes infinitamente grandes y su razón carece de sentido. Por esto, transformamos la expresión dada dividiendo el numerador y el denominador entre x:

$$\frac{3x+5}{4x+1}=\frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}.$$

Pero $\frac{5}{x}$ y $\frac{1}{x}$ cuando $x \to \infty$ son infinitésimos; por tanto, los límites del dividendo y el divisor serán 3 y 4, respectivamente, y el límite de la función, 0,75.

El proceso de determinación del límite de la función dada se anota así:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{4+0}=0{,}75.$$

EJEMPLO 9. Hallar $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}$.

SOLUCIÓN. Dividiendo ambos términos del quebrado entre x^2, obtendremos:

$$\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}=\frac{2x+3+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Cuando $x \to \infty$, las relaciones $\frac{1}{x}$ y $\frac{4}{x^2}$ tienden a cero y $2x$ crece sin fin; por tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)=1,$$

y toda la fracción

$$\frac{2x + 3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} \to \infty.$$

De este modo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \infty.$$

Ejercicios

Hallar:

1. $\lim_{x\to 2} (2x^2 - 3x + 4)$. 2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 3}{2x - 1}$. 3. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{5}$.

4. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2}{1 + 2x^2}$. 5. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x - 1}$. 6. $\lim_{x\to 0} \frac{4x^3 - 3x^2}{2x^2 + 5}$. 7. $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2 + x}$.

8. $\lim_{x\to 0} \frac{x + 1}{x}$. 9. $\lim_{x\to 0} \frac{1 + x + x^2}{2x + x^2 + x^3}$. 10. $\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2}{3x + 2x^2}$.

11. $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + 3x^2}{2x}$. 12. $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + 3x^2}{2x^3}$. 13. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

14. $\lim_{x\to 2a} \frac{4a^2 - x^2}{x - 2a}$. 15. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. 16. $\lim_{x\to -5} \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$.

17. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$. 18. $\lim_{x\to -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$. 19. $\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 9}$.

20. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a - x}}{x}$. 21. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}{x}$. 22. $\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$.

23. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{4x}$. 24. $\lim_{x\to\infty} \left(4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$. 25. $\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2 + x}$.

26. $\lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{x}$. 27. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x - 1}$. 28. $\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^2}{1 + 2x^2}$. 29. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x^3}{x^4 + x^5}$.

30. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^5}{x^2 + x^3}$.

§ 48. Límite de la relación $\frac{\text{sen } x}{x}$ cuando $x \to 0$. Como en este caso lím $x = 0$, el teorema del límite del cociente no puede aplicarse para hallar el límite de la relación $\frac{\text{sen } x}{x}$ cuando $x \to 0$; tampoco puede hacerse ninguna transformación para calcular el límite de dicha relación. Por ello, utilizaremos concepciones geométricas.

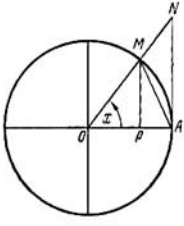


FIG. 75

Tomemos una circunferencia de radio R y un ángulo central x expresado en radianes (fig. 75). Tracemos una cuerda AM y una tangente AN que corte la prolongación del radio OM en el punto N. De la figura vemos:

$$\text{área } \Delta\, AOM < \text{área del sector } AOM < \text{área } \Delta\, AON.$$

Expresando las áreas de los triángulos y del sector conforme a las fórmulas, podremos transcribir:

$$\frac{OA \cdot PM}{2} < \frac{OA \cdot OAM}{2} < \frac{OA \cdot AN}{2};$$

después de simplificar por $\frac{OA}{2}$, obtendremos:

$$PM < OAM < AN.$$

Dividiendo luego todos los términos de las últimas inecuaciones por R obtenemos:

$$\frac{PM}{R} < \frac{OAM}{R} < \frac{AN}{R}. \qquad (1)$$

Pero

$$\frac{PM}{R} = \text{sen } x,$$

$$\frac{AN}{R} = \text{tg } x,$$

$$\frac{OAM}{R} = x,$$

por lo que las inecuaciones (1) toman la forma:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

ó

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Como x es un ángulo agudo, sen x es positivo; dividiendo las inecuaciones obtenidas entre sen x, hallamos:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

ó

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x. \qquad (2)$$

Supongamos ahora que $x \to 0$; entonces

$$\cos x \to 1.$$

Pero como la relación $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, de acuerdo con las inecuaciones (2), está comprendida entre la unidad y cos x, con tanta mayor razón tenderá a la unidad.

La tendencia de esta relación a la unidad, se evidencia con claridad si las magnitudes contenidas en las inecuaciones (2) se representan en el eje de coordenadas (fig. 76).

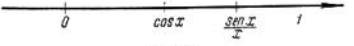


FIG. 76

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

§ 49. Magnitudes infinitesimales equivalentes.
Las magnitudes infinitesimales se llaman equivalentes si el límite de su razón es igual a la unidad.

En el § 48 se estudió el límite de la relación de dos infinitésimos sen x y x que resultó igual a la unidad; por

tanto, sen x y x son infinitesimales equivalentes cuando $x \to 0$.

Pueden ofrecerse otras infinitesimales equivalentes como, por ejemplo, tg x y x cuando $x \to 0$. En efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

En los cursos detallados de análisis matemático se demuestra que al determinar el límite de dos infinitésimos, cada uno de ellos puede sustituirse por su equivalente.

EJEMPLO 1. Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$.

SOLUCIÓN. Ya se ha mostrado que sen x y x cuando $x \to 0$ son infinitesimales equivalentes; por tanto, en la expresión dada sen $\frac{x}{2}$ puede sustituirse por su argumento $\frac{x}{2}$. Haciéndolo, obtendremos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \lim \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$.

SOLUCIÓN. Cuando $x \to 0$, también $ax \to 0$, y $bx \to 0$; por este motivo, sen ax y sen bx son magnitudes infinitesimales. Sustituyendo sen ax y sen bx por sus infinitesimales equivalentes ax y bx, obtendremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{bx} = \lim \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

§ 50. *Límite de la expresión* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *cuando* $n \to \infty$

Ejercicios

Hallar:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$. 2. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x}$. 3. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$. 4. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{x}$.

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{3x}$. 6. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{bx}$. 7. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$. 8. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}$.

9. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2}}{x^3}$. 10. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^3}$. 11. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{x}$.

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$. 13. $\lim_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x$. 14. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x}{x^2}$.

15. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x}$. 16. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{x}$. 17. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}$.

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3 \operatorname{sen} x}$. 19. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$. 20. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$. 21. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

§ 50. Límite de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n \to \infty$. En los cursos detallados de análisis matemático se demuestra que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiene límite cuando $n \to \infty$ y que el mismo es mayor que 2 y menor que 3, expresándose por un número irracional. Para esclarecer lo dicho, confeccionemos la siguiente tabla de valores de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando crecen los valores de n:

n	1	2	3	4	5	10	100	1 000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,59	2,705	2,717

La tabla evidencia que, a medida que crece n, crece también la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, retardándose en el crecimiento.

El límite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n \to \infty$ es, aproximadamente, 2,718 y se designa por la letra e.

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718.$$

Puede también mostrarse que para toda infinitesimal α

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

§ 51. **Logaritmos naturales.** En matemáticas, el número e tiene enorme significado que puede compararse con el del número π. El número e se toma por base de los logaritmos *naturales* o *neperianos* * muy utilizados en análisis matemático, pues con su ayuda muchas fórmulas pueden representarse de una forma más sencilla que con los logaritmos decimales. El logaritmo natural se indica por el símbolo ln.

Los logaritmos natural y decimal (vulgar) presentan una correlación simple que permite pasar del logaritmo vulgar de un número al natural y viceversa.

Para deducir esta correlación, tomemos un número N y representémoslo en forma de dos potencias, tomando por base los números 10 y e:

$$N = 10^x$$

y

$$N = e^y$$

donde, como se sabe, x es el logaritmo *decimal* e y, el *natural* del número N. De las igualdades escritas se deduce:

$$10^x = e^y.$$

Hallando el logaritmo decimal de ambos miembros de esta igualdad, obtendremos:

$$x \log 10 = y \log e,$$

*) Los logaritmos naturales se llaman neperianos en honor al matemático escocés Neper (Napier J.), quien fuera el primero en utilizar cálculos logarítmicos.

o

$$x = y \log e,$$

de donde

$$y = \frac{x}{\log e}.$$

Sustituyendo x e y por $\log N$ y $\ln N$, respectivamente, escribiremos:

$$\ln N = \frac{\log N}{\log e}.$$

En la tabla de logaritmos hallaremos:

$$\log e = 0{,}4343.$$

Por tanto,

$$\ln N = \log N \cdot \frac{1}{\log e} = \log N \cdot \frac{1}{0{,}4343} = \log N \cdot 2{,}303 \quad (1)$$

es decir, *el logaritmo natural de un número es igual al producto del logaritmo vulgar de ese mismo número por* 2,303.

De aquí se deduce que el logaritmo natural de un número es 2,303 veces mayor que el vulgar.

De la igualdad (1), hallamos:

$$\log N = \ln N \cdot 0{,}4343,$$

o sea, *el logaritmo decimal de un número es igual al producto del logaritmo natural de ese mismo número por* 0,4343.

EJEMPLO. Hallar ln 2.

SOLUCIÓN. $\ln 2 = \log 2 \cdot 2{,}303 = 0{,}3010 \cdot 2{,}303 \approx 0{,}693.$

Ejercicios

Hallar:

1. ln 3. **2.** ln 12. **3.** ln 4,5. **4.** ln 10,5. **5.** ln 0,2. **6.** ln 0,16. **7.** ln 0,84. **8.** ln 0,1.

Capítulo VI
La función y sus propiedades elementales

§ 52. **Símbolos de la dependencia funcional.** Como se indicó (§ 6), la variable y se denomina función de la variable x, si a cada valor admisible de x le corresponde un valor plenamente definido de y. Dar una función analíticamente significa indicar las operaciones a realizar con el argumento x para obtener el valor correspondiente de y.

Sea, por ejemplo, una función definida por la ecuación

$$y = \frac{x^2 + 2\sqrt{x} - 1}{x}.$$

Con ello, vienen dadas también las operaciones que deben efectuarse con x para obtener y.

Ocurre frecuentemente que, en la exposición de un mismo problema, se tropieza reiteradamente con una misma función expresada por una ecuación compleja a veces. Para mayor brevedad de anotación, el miembro derecho de la ecuación que define la función se designa $f(x)$ y se escribe:

$$y = f(x).$$

Esta igualdad se lee así: "y es igual a f de x" o "y es función de x".

En ocasiones no nos interesará conocer la función concreta con el conjunto de operaciones a realizar con el argumento, sino el hecho de que una variable depende de otra. En este caso, también se anota $y = f(x)$, entendiendo por $f(x)$ un conjunto desconocido de operaciones con el argumento x.

Si en una misma cuestión se trata de varias funciones distintas, para no confundirlas sus símbolos se designan por diferentes letras, por ejemplo: F, φ, ψ.

§ 53. Valores de la función. Dominio de la función. I. Sea la función y que viene dada por la ecuación

$$y = x^2 - x. \qquad (1)$$

Demos a x una serie de valores; por ejemplo, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, etc.; entonces, y obtendrá los correspondientes valores $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 20$, etc.

Los números x_1, x_2, x_3 se donominan *valores del argumento*, y los números y_1, y_2, y_3, *valores de la función*.

Si el conjunto de operaciones con el argumento de la función (1) se designa por $f(x)$, entonces puede escribirse:

$$f(x) = x^2 - x.$$

En este caso, los valores hallados de la función se anotarán así:

$$f(1) = 0, \quad f(3) = 6, \quad f(5) = 20.$$

EJEMPLO. Dada la función $f(x) = 2x^2 + x - 1$. Hallar:

1) $f(-1)$, 2) $f(0)$, 3) $f(2)$, 4) $f(a)$.

SOLUCIÓN.

1) $f(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$,

2) $f(0) = 2 \cdot 0 + 0 - 1 = -1$,

3) $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 9$,

4) $f(a) = 2a^2 + a - 1$.

II. Como se ve en el ejemplo examinado, la función tiene valores reales para todo valor real de x. Sin embargo, son frecuentes los casos en que, para ciertos valores reales del argumento, la función carece de valores reales o, como suele decirse, *no existe*. Por ejemplo, la función $y = \frac{1}{x}$ no existe cuando $x = 0$, por cuanto $\frac{1}{0}$ no se expresa con ningún número; la función $y = \sqrt{x}$ no existe cuando $x < 0$, ya que con este valor de x tiene valores imaginarios.

DEFINICIÓN. *Se llama dominio de una función el conjunto de los valores reales del argumento en los cuales la función toma valores reales.*

Por ejemplo, la función $y = x^2$ tiene por dominio el conjunto de todos los valores reales de x, o sea,

$$-\infty < x < \infty;$$

para la función $y = \sqrt{x^2 - 1}$, el dominio consta de los valores reales de x, cuya magnitud absoluta no sea inferior a la unidad, es decir,

$$|x| \geqslant 1.$$

Ejercicios

1. Dada la función $f(x) = 2x - 1$. Determinar

1) $f(2)$, 2) $f(0)$, 3) $f(-1)$.

2. Dada la función $f(x) = 3x^2 + 1$. Determinar

1) $f(-2)$, 2) $f(5)$, 3) $f(2a)$, 4) $f(a-1)$.

3. Demostrar que para la función $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ se verifica la igualdad $f(-3) = f(3)$.

4. Dada la función $f(x) = x^3 - x$. Demostrar que $f(-x) = -f(x)$.

5. ¿Cómo anotar que los números 2 y -3 son raíces de la ecuación $f(x) = 0$?

6. Hallar el dominio de las funciones:

1) $y = \dfrac{1}{1+x}$;

2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

3) $y = \sqrt{x - 1}$;

4) $y = \sqrt{1 - x}$;

5) $y = \ln x$;

6) $y = e^x$;

7) $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

§ 54. Representación geométrica de las funciones. Sea dada la función $y = f(x)$. Por la geometría analítica sabemos que, hablando en general, la ecuación $y = f(x)$ define cierta línea llamada *gráfico de la función*. Este gráfico nos ofrece la representación visual del carácter de la variación de la función dada.

EJEMPLO 1. Construir el gráfico de la función $y = x^3$.

SOLUCIÓN. Suponiendo $x = -1{,}2;\ -1;\ -0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}2$, hallamos los correspondientes valores de la función y y anotamos los resultados del cálculo en la tabla:

x	$-1{,}2$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}2$
y	$-1{,}7$	-1	$-0{,}1$	0	$0{,}1$	1	$1{,}7$

Considerando cada par de valores hallados de x e y como coordenadas de los puntos en el plano, construimos estos puntos y, uniéndolos con una línea suave, obtenemos una curva llamada *parábola cúbica* (fig. 77).

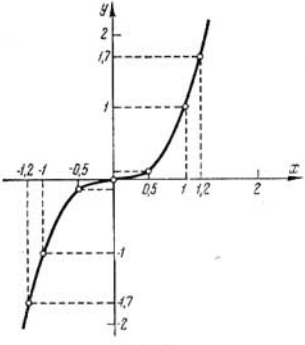


FIG. 77

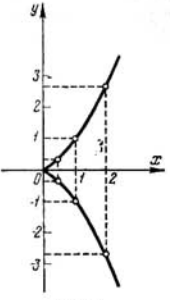


FIG. 78

EJEMPLO 2. Construir la curva dada por la ecuación

$$y^2 = x^3.$$

SOLUCIÓN. Hallemos y de la ecuación dada

$$y = \pm \sqrt{x^3}.$$

Vemos que la ecuación $y^2 = x^3$ define dos funciones:

$$y = \sqrt{x^3} \text{ e } y = -\sqrt{x^3},$$

cuyo dominio es $x \geqslant 0$. Confeccionemos la siguiente tabla de valores de x e y, calculando $\sqrt{x^3}$:

x	0	0,5	1	2
y	0	$\pm$ 0,35	$\pm$ 1	$\pm$ 2,8

Construyendo los puntos por las coordenadas halladas y uniéndolos con una línea suave, obtendremos una curva llamada *parábola semicúbica* (fig. 78).

EJEMPLO 3. Construir el gráfico de la función

$$y = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Aquí la función viene dada por dos ecuaciones: $y = x$, donde x tiene sólo valores positivos y nulo, e $y = -x$, donde x tiene sólo valores negativos. Por lo tanto, el dominio de la función dada consta de todos los números reales, y su gráfico representa una línea quebrada formada por la bisectriz del primero y segundo ángulo de coordenadas (fig. 79).

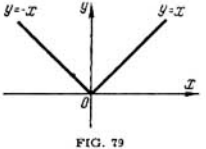


FIG. 79

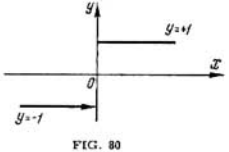


FIG. 80

EJEMPLO 4. Construir el gráfico de la función

$$y = \begin{cases} +1, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. El dominio de la función dada consta de todos los números reales, y su gráfico está formado por dos semirrectas paralelas al eje Ox (fig. 80; la flecha en la semirrecta de la izquierda designa que no le pertenece el punto $(0; -1)$).

Nota. Del álgebra se sabe que la función puede venir dada por tres procedimientos: analítico, tabular y gráfico. En los dos primeros ejemplos examinados se han brindado los citados tres procedimientos. Aunque todos ellos se aplican en matemáticas, el primero desempeña un papel de especial importancia.

§ 55. Incremento de la función. Si la variable x ha cambiado su valor de x_1 a x_2, la diferencia entre su nuevo valor y el

inicial se llama *incremento de la variable* y se designa por el símbolo Δx * (se lee: "delta x").

Por lo tanto,

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

de aquí

$$x_2 = x_1 + \Delta x.$$

La magnitud x_2 se denomina *valor incrementado de la variable.*

El incremento de la variable puede ser tanto un número positivo como negativo. Si, por ejemplo, el valor de x varía de 5 a 5,2, entonces,

$$\Delta x = 5{,}2 - 5 = 0,\ 2,$$

y si varía de 10 a 9,7

$$\Delta x = 9{,}7 - 10 = -0{,}3.$$

Sea dada la función

$$y = x^2.$$

Supongamos que el valor inicial de su argumento era $x_1 = 3$, variando luego a $x_2 = 3{,}5$; entonces

$$\Delta x = 3{,}5 - 3 = 0{,}5.$$

Hallando los valores de la función cuando $x_1 = 3$, primero, y cuando $x_2 = 3{,}5$, después, obtendremos:

$$y_1 = 3^2 = 9,$$

$$y_2 = 3{,}5^2 = 12{,}25.$$

La magnitud y_1 se llama *valor inicial de la función*, y_2, *su valor nuevo* o *incrementado*, y la diferencia $y_2 - y_1$, *incremento de la función.* Conforme al símbolo establecido para los incrementos, podemos escribir:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 12{,}25 - 9 = 3{,}25.$$

Hallemos el incremento Δy de la función $y = x^2$ para toda variación de x.

---

*) Observemos que Δx no puede considerarse como producto de dos factores; el símbolo Δ es inseparable de x, del mismo modo que, por ejemplo, en la expresión sen x el símbolo sen es inseparable de x.

Supongamos que su argumento tiene cualquier valor inicial x; entonces, el valor inicial de la función dada será:

$$y = x^2. \tag{1}$$

Admitamos ahora que x tiene un incremento Δx; entonces, el valor nuevo (incrementado) del argumento será $x + \Delta x$. Para hallar el valor nuevo (incrementado) de la función, es necesario sustituir x por $x + \Delta x$ en la expresión dada de dicha función; obtendremos:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2. \tag{2}$$

Restando la igualdad (1) de la igualdad (2), hallaremos:

$$\begin{array}{rl} & y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \\ - & \\ & y \qquad\quad = x^2 \\ \hline & \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2, \end{array}$$

o, luego de la transformación,

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2. \tag{3}$$

Hemos hallado *la forma general del incremento de la función* dada.

Para obtener el incremento de esta función en el caso particular expuesto al comienzo del párrafo, en la igualdad (3) se pueden sustituir x y Δx por los números 3 y 0,5, respectivamente, tras lo cual tenemos:

$$\Delta y = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + (0{,}5)^2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25.$$

Este último resultado coincide con el anterior.

Así, pues, para hallar el incremento de la función es necesario:

1) ***sustituir x por $x + \Delta x$ e y por $y + \Delta y$ en la expresión dada de dependencia funcional;***

2) ***restar miembro a miembro la expresión dada de la obtenida.***

Si la función viene dada en la forma general $y = f(x)$, entonces, conforme a la regla citada, su incremento puede anotarse por la fórmula

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{4}$$

EJEMPLO 1. Hallar el incremento de la función $y=2x^2+3$.

SOLUCIÓN.
$$y+\Delta y = 2(x+\Delta x)^2+3 =$$
$$= 2x^2+4x\,\Delta x+2(\Delta x)^2+3;$$
$$y+\Delta y = 2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+3$$
$$-$$
$$y \qquad = 2x^2+3$$
$$\Delta y = 4x\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

EJEMPLO 2. Hallar el incremento de la función $y=\frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN.
$$y+\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x};$$
$$y+\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x}$$
$$-$$
$$y \qquad = \frac{1}{x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Ejercicios

1. Dada la función $y=2x+1$. Hallar su incremento si x varía: 1) de 4 a 4,3; 2) de 0 a 0,2; 3) de 2 a 1,5.

2. Hallar el incremento de la función $y=2x^2$ si x varía: 1) de 1 a 1,3; 2) de $-0,2$ a $+0,2$; 3) de 0 a a.

3. Hallar el incremento de la función $y=x^2-1$ si se conoce: 1) $x_1=2$, $\Delta x=0,5$; 2) $x_1=3$, $\Delta x=-0,6$.

4. Hallar el incremento de la función $y=2x^2-x+1$ si se dan: 1) $x_1=-3$, $\Delta x=0,5$; 2) $x_1=a$, $\Delta x=h$.

5. Dados $v=\frac{12}{p}$, $p_1=1$, $\Delta p=0,4$; hallar Δv.

6. Dados $y=\operatorname{sen} x$, $x_1=\frac{\pi}{2}$, $\Delta x=\frac{\pi}{6}$; hallar Δy.

7. Hallar la forma general del incremento de la función: 1) $y=3x+2$, 2) $y=2x^2-1$, 3) $y=3x^2-2x$, 4) $y=-x^2-3x$, 5) $y=x^3$, 6) $y=2x^3-2x^2$, 7) $y=x-\frac{1}{x}$.

§ 56. Representación geométrica de los incrementos del argumento y de la función. Sea dada la función $y=f(x)$ cuyo gráfico está representado en la fig. 81.

Supongamos que el segmento $OP_1=x$ representa el valor inicial del argumento; entonces, el valor de la función para

este valor del argumento será $f(x)$ y su representación geométrica, la ordenada P_1M_1 del punto M_1:

$$P_1M_1 = f(x). \tag{1}$$

Demos al argumento x el incremento

$$P_1P_2 = \Delta x;$$

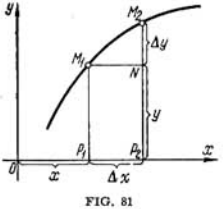


FIG. 81

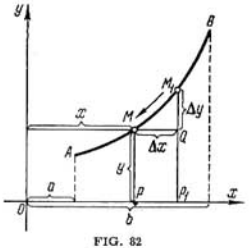


FIG. 82

entonces, el nuevo valor de x será

$$OP_2 = x + \Delta x;$$

y el nuevo valor de la función, $f(x + \Delta x)$, siendo su representación geométrica la ordenada P_2M_2 del punto M_2:

$$P_2M_2 = f(x + \Delta x). \tag{2}$$

Trazando desde el punto M_1 una recta paralela a OP_2 hasta su intersección con la recta P_2M_2 en el punto N, tendremos

$$NM_2 = P_2M_2 - P_2N = P_2M_2 - P_1M_1,$$

o, conforme a las igualdades (1) y (2)

$$NM_2 = f(x + \Delta x) - f(x).$$

La diferencia obtenida en el miembro derecho es igual a Δy [véase la fórmula (4) del § 55] y, por lo tanto,

$$NM_2 = \Delta y.$$

or consiguiente, *el incremento del argumento se representa geométricamente por el incremento de la abscisa de un punto de la curva, y el de la función, por el de la ordenada de ese punto.*

§ 57. Continuidad de la función. Sea el arco AB el gráfico de la función $y = f(x)$ (fig. 82). Tomemos en este arco un

punto cualquiera $M(x; y)$ y demos a x el incremento

$$PP_1 = \Delta x,$$

entonces, y obtendrá el incremento

$$QM_1 = \Delta y.$$

Supongamos que $\Delta x \to 0$ y que, en este caso, $\Delta y \to 0$, es decir,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Esto significa que si $\Delta x \to 0$, la ordenada P_1M_1 se aproxima indefinidamente a PM, y el punto M_1, al punto M, y, por lo tanto, en el arco AB se hallará un punto tan próximo como se quiera a M. En este caso se dice que la función $y = f(x)$ *es continua para el valor dado de* x.

DEFINICIÓN. *La función* $y = f(x)$ *se llama continua para el valor dado de* x, *si al incremento infinitesimal de* x *le corresponde un incremento infinitesimal de* y, *o sea, si*

$$\lim_{x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (1)$$

Cuando esta condición se verifica para todo valor del argumento en un intervalo de $x = a$ a $x = b$, se dice que la función es continua en el citado intervalo. Por consiguiente, al arco AB del gráfico de la función continua puede trazarse mediante el movimiento continuo del lápiz sin separarlo del papel.

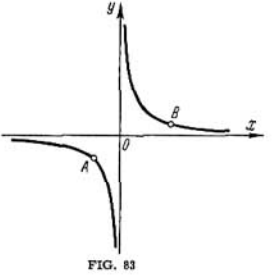


FIG. 83

Sin embargo, no toda función ni para todo valor de x es continua. Tomemos, por ejemplo, la función $y = \frac{1}{x}$. Por la geometría analítica sabemos que el gráfico de esta función (fig. 83) es una hipérbola equilátera compuesta de

dos ramas. Moviendo continuamente el lápiz puede describirse cualquier arco en la rama izquierda, y cualquier arco, en la derecha; pero no se puede llegar del punto A, en la rama izquierda, al B, en la derecha, sin separar el lápiz del papel. Esto evidencia la continuidad de la función $y = \frac{1}{x}$ para todo x, excepto $x = 0$, donde, como se dice, la función dada tiene una *discontinuidad*. Los puntos de discontinuidad de la función corresponden a los puntos de discontinuidad del gráfico.

En el ejemplo examinado, la discontinuidad consiste en que al pasar el argumento por $x = 0$ (de izquierda a derecha), el valor de la función varía de $-\infty$ a $+\infty$.

Tales discontinuidades son propias, en general, de las funciones fraccionarias para los valores de x cuando el denominador se convierte en cero y los valores de la función crecen indefinidamente ($y \to \infty$). Por ejemplo, la función $y = \frac{4x}{x-3}$ tiene una discontinuidad para $x = 3$; la función $y = \frac{10}{x^2-4}$, para $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$, etc.

Existen también discontinuidades de otro género cuando la función varía un valor finito por otro también finito, al pasar el argumento por cierto valor. Estas discontinuidades se denominan *discontinuidades de primer género*. Ejemplo de las mismas es la función

$$y = \begin{cases} +1, & \text{si} \quad x \geqslant 0. \\ -1, & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

cuyo gráfico está representado en la fig. 80, pág. 158. Aquí, al pasar el argumento por $x = 0$ (de izquierda a derecha), el valor de la función varía de -1 a $+1$.

EJEMPLO. Investigar la continuidad de la función $y = x^2$.

SOLUCIÓN. Demos a x el incremento Δx; entonces la función recibe el incremento [fórmula (3) del § 55]

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Hallemos el límite de Δy cuando $\Delta x \to 0$;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [2x\Delta x + (\Delta x)^2] = 2x \cdot 0 + 0^2 = 0.$$

La igualdad obtenida se verifica para todo valor finito de x; por lo tanto, la función $y = x^2$ es continua en todo valor de x. El gráfico de la función $y = x^2$ (véase la fig. 8, pág. 22) presenta la continuidad de ésta.

Examinemos otra definición de la continuidad de la función, estrechamente vinculada a la ya ofrecida.

Hallemos el incremento de la función $y = f(x)$ cuando el argumento varía de $x = c$ a $x = c + \Delta x$; de acuerdo con la fórmula (4) del §55, se tiene:

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c).$$

Si la función dada es continua en $x = c$, entonces, sustituyendo en la igualdad (1) Δy por su expresión hallada, anotaremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(c + \Delta x) - f(c)] = 0.$$

Conforme al teorema del límite de la diferencia (§ 45), tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(c + \Delta x) - f(c)] = \lim_{\Delta x \to 0} f(c + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = 0$$

ó

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Pero $f(c)$ es una magnitud constante; por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c + \Delta x) = f(c). \qquad (2)$$

Si

$$c + \Delta x = x,$$

entonces, de la condición $\Delta x \to 0$ se deduce: $x \to c$; la igualdad (2) tomará la forma

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c). \qquad (3)$$

De esta manera, de la igualdad (1) se deriva la igualdad (3). Se puede demostrar lo contrario, que de la (3) se deduce la (1).

De aquí se evidencia que la igualdad (3) expresa una condición de continuidad de la función para un x dado, equivalente a la examinada al comienzo del párrafo.

DEFINICIÓN. *La función $y = f(x)$ se llama continua para $x = c$, si el límite de esta función cuando $x \to c$ es igual al valor de la función cuando $x = c$.*

Si la igualdad (3) se verifica para todo valor del argumento desde $x = a$ hasta $x = b$, se dice que la función es continua en el intervalo dado.

Expliquemos geométricamente lo dicho. En el gráfico de la función continua $f(x)$ se da el punto M con la abscisa $x = c$ (fig. 84) y el punto M_2 con la abscisa $x = c + \Delta x$; entonces, sus ordenadas serán, respectivamente:

$$PM = f(c) \quad \text{y} \quad P_2M_2 = f(c + \Delta x) = f(x).$$

Como la función es continua, cuando $\Delta x \to 0$ también $\Delta y \to 0$, y el punto M_2 se aproxima indefinidamente a M. Pero en este caso, como se ve

$$c + \Delta x = x \to c$$

y la ordenada $P_2M_2 = f(x)$ tiende a la ordenada $PM = f(c)$.

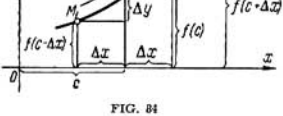


FIG. 84

Si se toma el punto M_1 con la abscisa $x = c - \Delta x$, también en este caso si $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, y el punto M_1 se aproxima indefinidamente al M. Pero entonces es evidente que

$$c - \Delta x = x \to c$$

y la ordenada $P_1M_1 = f(x)$ tiende a la ordenada $PM = f(c)$.

Vemos que si la función dada $y = f(x)$ es continua cuando $x = c$, la igualdad (3) se verifica cuando x tiende a c tanto si es por la derecha como por la izquierda. Evidentemente, es justa también la afirmación inversa: si la igualdad (3) se verifica cuando x tiende a c, tanto si es por la derecha como por la izquierda, la función $y = f(x)$ es continua cuando $x = c$.

Si no se verifica esta condición, la función tiene una discontinuidad Por ejemplo, en la fig. 80 se tiene discontinuidad de la función para $x = 0$; aquí su límite por la derecha es igual a $+1$ cuando el argumento tiende a cero, y por la izquierda tiene otro valor, igual a -1.

Observemos que la igualdad (3) confirma la justeza de lo dicho en el § 47 acerca de que para determinar el límite de una función basta con sustituir el argumento por su valor límite.

Ejercicios

Investigar la continuidad de las siguientes funciones:

1. $y = 2x$. 2. $y = x^2 - 3$. 3. $y = x - 2x^2$. 4. $y = x^3$. 5. $y = \operatorname{sen} x$. 6. $y = \cos x$.

Indicar los puntos de descontinuidad de las funciones:

7. $y = \dfrac{1}{1-x}$. 8. $y = \dfrac{x}{x-2}$. 9. $y = \dfrac{2x}{x+1}$. 10. $y = \operatorname{tg} x$.

§ 58. Propiedad de la función continua. ***La función continua puede cambiar de signo sólo al pasar por cero.*** Esta propiedad

de la función continua es fácil de explicar por vía geométrica. En efecto, sea (fig. 85)

$$f(x) > 0 \quad \text{cuando} \quad x = a \text{ (punto } A\text{)},$$
$$f(x) < 0 \quad \text{cuando} \quad x = b \text{ (punto } B\text{)}.$$

Si varía continuamente el valor de la abscisa desde a hasta b, el gráfico de la función, en virtud de su continuidad,

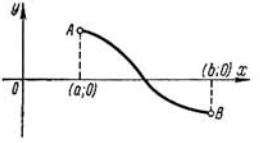


FIG. 85

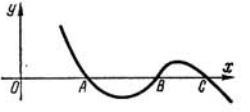


FIG. 86

debe cortar el eje Ox. Y en el punto de intersección de la curva con el eje de abscisas el valor de la función es igual a cero.

Si la función continua cambia de signo varias veces seguidas, su gráfico cortará el eje Ox otras tantas (fig. 86). Es evidente que esta función conserva el mismo signo en el intervalo entre los puntos vecinos de intersección del gráfico y el eje Ox (entre A y B los valores de la función son negativos, entre B y C, positivos), así como para todos los puntos situados a la izquierda de A (la función es positiva) y a la derecha de B (negativa).

§ 59. Tipos de funciones. *La función se llama explícita si la ecuación por la que viene dada está despejada con relación a esta función, e implícita, en caso contrario.*

Por ejemplo, $y = 2x^2 - x + 3$ es una función explícita: en cambio, en la ecuación $x + y = 12$, la función y está dada implícitamente. Sin embargo, la función dada por esta ecuación se puede representar de forma explícita; en efecto, despejando la ecuación con relación a y, obtendremos $y = 12 - x$. Pero, en casos más complejos, frecuentemente es imposible llevar a cabo esta transformación.

Las funciones se dividen en dos clases: *funciones algebraicas* y *funciones trascendentes*.

Recibe el nombre de algebraica la función con cuyo argumento se efectúa un número finito de operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división y elevación a una potencia racional).

Por ejemplo, $y = 2x^2 - 3\sqrt{x} + 1$, $y = \frac{4x^2 - 1}{x + 3}$ son funciones algebraicas.

Se llama trascendente toda función no algebraica.

Por ejemplo, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \text{sen } x$, $y = \text{arc sen } x$ son funciones trascendentes.

Las funciones trascendentes más simples son:

1. *La función exponencial* $y = a^x$, donde el argumento es el exponente.

2. *La función logarítmica* $y = \log_a x$.

3. *Las funciones trigonométricas*: $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg } x$, $y = \text{ctg } x$.

4. *Las funciones ciclométricas*: $y = \text{arc sen } x$, $y = \text{arc cos } x$, $y = \text{arc tg } x$, $y = \text{arc ctg } x$.

Funciones recíprocamente inversas. Sea dada la ecuación

$$y = x^3, \tag{1}$$

donde y es función de x. Expresemos de aquí x por y:

$$x = \sqrt[3]{y}. \tag{2}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) x por y e y por x, obtendremos:

$$y = \sqrt[3]{x}. \tag{3}$$

La función y, dada por la ecuación (3) se llama *inversa* con relación a la función y dada por la ecuación (1); ambas funciones (1) y (3) son *recíprocamente inversas.*

Por ejemplo, $y = \text{sen } x$ e $y = \text{arc sen } x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ son funciones recíprocamente inversas, así como también lo son las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$.

Es interesante señalar que los gráficos de funciones recíprocamente inversas son simétricos con relación a la bisectriz del primero y tercer ángulo de coordenadas. Esto se deduce de la propia definición de la función inversa. En

efecto, en el ejemplo antes expuesto, las funciones (1) y (2) definen un mismo lugar geométrico de puntos; por lo tanto se representan por un mismo gráfico. Además, como la función (3) se obtiene de la función (2) mediante el simple cambio

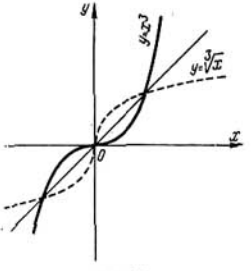


FIG. 87

de los papeles de x e y, el gráfico de la función (3) se obtiene mediante el reflejo simétrico del gráfico de la función dada (1), con relación a la bisectriz del primero y tercer ángulo de coordenadas (véase la fig. 87).

Capítulo VII
Derivada de la función

§ 60. El movimiento uniforme y su velocidad. Supongamos que un cuerpo se desplaza uniforme y rectilíneamente. Esto significa que por cada unidad de tiempo recorre una misma distancia denominada *velocidad de este movimiento*. La ley del *movimiento uniforme* se expresa por la fórmula

$$s = vt + s_0, \tag{1}$$

que representa una función de primer grado (función lineal), y, geométricamente, una recta.

Y, viceversa, toda función lineal de la forma (1), donde v y s_0 son constantes, expresa la ley del movimiento rectilíneo uniforme. Para cerciorarnos de lo dicho, hallemos el espacio recorrido por el cuerpo en los instantes t_1 y t_2. Sustituyendo en la igualdad (1) t por sus valores t_1 y t_2, obtendremos:

$$s_1 = vt_1 + s_0,$$

$$s_2 = vt_2 + s_0.$$

De aquí

$$s_2 - s_1 = (vt_2 + s_0) - (vt_1 + s_0) = v(t_2 - t_1)$$

y

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v.$$

Designando por Δs el incremento del espacio $s_2 - s_1$, y por Δt, el incremento del tiempo $t_2 - t_1$, anotaremos:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v. \tag{2}$$

La igualdad (2) muestra que la relación entre el espacio recorrido por el cuerpo y el intervalo de tiempo empleado en

recorrerlo es una magnitud constante. Por este motivo, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ representa la velocidad del movimiento uniforme.

Por lo tanto, *la función lineal*

$$s = vt + s_0$$

expresa la ley del movimiento rectilíneo uniforme, siendo v la velocidad de dicho movimiento.

§ 61. El movimiento variado y su velocidad. En la naturaleza, además del movimiento uniforme, existe el movimiento *variado*. Su ley no se define por una ecuación de primer grado, sino por otra, más compleja. Por ejemplo, sea dada la función

$$s = 4{,}9\, t^2,$$

que expresa la ley de la caída libre de un cuerpo. Esta caída es un movimiento variado, por lo que surge el problema de cómo hallar su velocidad en cierto instante de tiempo. Hagamos lo siguiente.

Supongamos que, al inicio de la caída, el cuerpo se hallaba en el punto O (fig. 88). Al transcurrir el tiempo t, habrá recorrido un espacio igual a

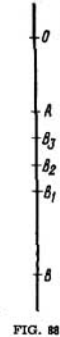


FIG. 88

$$s_1 = 4{,}9\, t^2,$$

y se encontrará en el punto A, y al transcurrir $t + \Delta t$, desde el comienzo del movimiento, el espacio recorrido será

$$s_2 = 4{,}9\, (t + \Delta t)^2,$$

encontrándose en el punto B. El espacio recorrido por el cuerpo en el tiempo Δt será:

$$AB = s_2 - s_1 = 4{,}9\, (t + \Delta t)^2 - 4{,}9\, t^2 = 4{,}9\, t^2 + 9{,}8\, t\, \Delta t + \\ + 4{,}9\ (\Delta t)^2 - 4{,}9\, t^2 = 9{,}8\, t \Delta t + 4{,}9\, (\Delta t)^2.$$

Dividiendo el espacio recorrido $s_2 - s_1$, igual a Δs, entre el tiempo Δt, obtendremos:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9{,}8\, t\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9{,}8t + 4{,}9\, \Delta t. \qquad (1)$$

El cociente de la división $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ se llama *velocidad media* de caída del cuerpo en un espacio $AB = \Delta s$.

Sin embargo, la velocidad media no expresa la velocidad real en cualquier instante de tiempo. Por ejemplo, cuando se dice que el tren marcha a 50 km/h, no significa que se desplaza a esta velocidad en todos los puntos de su recorrido; al salir de la estación, el tren aumenta paulatinamente la velocidad, llevándola hasta la magnitud máxima y, luego, retarda el movimiento hasta pararse en la siguiente estación. De este modo, su velocidad es inferior a 50 km/h en una parte del camino y superior, en otra, siendo la media de 50 km/h.

La velocidad media caracteriza cuanto mejor el movimiento tanto menor es el espacio en que está determinada. Por esto, supongamos que el intervalo de tiempo Δt de caída del cuerpo disminuye; entonces, el espacio recorrido $AB = \Delta s$ disminuirá también, haciéndose igual a AB_1, AB_2, AB_3, etc. (fig. 88), y para todo nuevo valor de Δt, la relación $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ definirá la velocidad media de caída del cuerpo en un espacio cada vez más corto. Supongamos que $\Delta t \to 0$; entonces $t + \Delta t \to t$, y el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tenderá a la magnitud denominada *velocidad en un instante dado de tiempo t*, lo que corresponde a la velocidad en el punto A.

Designando la misma por v, anotaremos:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Así, pues, *la velocidad del movimiento rectilíneo de un cuerpo en un instante dado de tiempo t es el límite de la velocidad media en un intervalo de tiempo desde t hasta* $t + \Delta t$, *cuando* $\Delta t \to 0$.

Tomando en consideración las igualdades (1) y (2), hallaremos la velocidad de caída de un cuerpo en el instante t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (9{,}8t + 4{,}9\,\Delta t) = 9{,}8t.$$

Por lo tanto,

$$v = 9{,}8\ t.$$

Ejercicios

1. Hallar la velocidad de un cuerpo que se desplaza conforme a la ley $s = 3t - 5$.

2. Hallar la velocidad media de un cuerpo que se desplaza conforme a la ley $s = 2t^2$, para los intervalos de tiempo:

1) de $t_1 = 2$ a $t_2 = 4$,

2) de $t_1 = 6$ a $t_2 = 10$.

3. La ley del movimiento de un cuerpo se expresa por la fórmula:

$$s = t^2 + 1.$$

Hallar su velocidad media para un intervalo de tiempo de t_1 a t_2, si:

1) $t_1 = 2$, $t_2 = 3$; 3) $t_1 = 2$, $t_2 = 2{,}01$;

2) $t_1 = 2$, $t_2 = 2{,}1$; 4) $t_1 = 2$, $t_2 = 2{,}001$.

Anotar los resultados del cálculo en una tabla y observar la variación de la velocidad media.

4. Hallar la velocidad de desplazamiento de un cuerpo en un instante de tiempo $t = 2$, si la ley del movimiento viene dada por la fórmula:

$$s = 4t^2 - 3.$$

5. La ley del movimiento de un cuerpo viene dada por la fórmula $s = 3t^2$. Hallar:

1) la velocidad media en un intervalo de tiempo de $t_1 = 2$ a $t_2 = 5$;

2) la velocidad en los instantes $t_1 = 2$ y $t_2 = 5$.

§ 62. Velocidad de variación de la función. La velocidad no sólo se determina en caso de movimiento, sino también en el de variación de una variable cualquiera que tenga sentido físico (velocidad de evaporación de un líquido, velocidad de reacción, etc.).

Supongamos que la variable y, que caracteriza cierto proceso de variación, es función lineal de otra variable x, o sea,

$$y = kx + b;$$

entonces, el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lo mismo que en el caso de movimiento uniforme (§ 60), será una constante igual a k, es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k. \qquad (1)$$

La magnitud k, que expresa las unidades de incremento de la función por unidad de incremento del argumento, recibe el nombre de *velocidad de variación de la función lineal para todo* x.

Si la variable y representa una función de otro tipo, entonces la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ define, por analogía con el movimiento variado (§ 61), *la velocidad media de variación de* y para un intervalo de valores del argumento desde x hasta $x + \Delta x$. Cuando $\Delta x \to 0$, tendremos $x + \Delta x \to x$, y la velocidad media de variación de la función tiende a la magni-

tud llamada *velocidad de variación de la función con un x dado*. Designando con v dicha velocidad, anotaremos:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Así, pues, *la velocidad de variación de la función con un x dado es el límite de su velocidad media para un intervalo del argumento desde x hasta* $x + \Delta x$, *cuando* $x \to 0$.

Analicemos varios ejemplos.

EJEMPLO 1. El peso P en kilogramos de una barra homogénea se expresa por la fórmula $P = 0{,}5\ l$, donde l es la longitud en metros. Determinar la velocidad de variación del peso de la barra al variar su longitud.

SOLUCIÓN. Como P es una función de primer grado con relación a la longitud l, en este caso tiene lugar una variación uniforme. Por lo tanto, la velocidad de variación del peso P para cualquier valor de la longitud l vendrá dada por la fórmula (1), siendo

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = 0{,}5.$$

Esto significa que, cuando la barra se alarga 1 m, su peso aumenta 0,5 kgf.

EJEMPLO 2. Al calentar un cuerpo, su temperatura T varía en función del tiempo de calentamiento t conforme a la ley $T = 0{,}4\ t^2$.

¿A qué velocidad se calienta el cuerpo en el instante $t = 10$ s?

SOLUCIÓN. La función dada es de segundo grado y expresa la ley del movimiento variado. Por este motivo, para resolver el problema aplicaremos la fórmula (2); además, para hallar el límite operaremos del mismo modo que lo hicimos al determinar la velocidad de un cuerpo en caída (§ 61).

En el instante $t = 10$, la temperatura del cuerpo $T_1 = 0{,}4 \cdot 10^2 = 40$.

En el instante $t = 10 + \Delta t$, la temperatura del cuerpo $T_2 = 0{,}4(10 + \Delta t)^2$.

Restando de T_2 el valor de T_1, obtendremos el incremento de la temperatura ΔT en el tiempo Δt:

$$\begin{aligned} \Delta T = T_2 - T_1 &= 0{,}4(10 + \Delta t)^2 - 40 = \\ &= 40 + 8\Delta t + 0{,}4(\Delta t)^2 - 40 = \\ &= 8\Delta t + 0{,}4(\Delta t)^2, \end{aligned}$$

de aquí

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 8 + 0{,}4\,\Delta t.$$

El cociente $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ es la velocidad media de calentamiento del cuerpo en el intervalo de tiempo desde $t_1 = 10$ hasta $t_2 = 10 + \Delta t$.

Para determinar la velocidad de calentamiento del cuerpo en el instante $t = 10$ s, hallaremos el límite de la velocidad media de calentamiento cuando $\Delta t \to 0$. Obtendremos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (8 + 0{,}4\Delta t) = 8.$$

Así, pues, en el instante $t = 10$ s el cuerpo se calienta 8° por unidad de tiempo. Esto quiere decir que si, a partir del instante $t = 10$ s, el cuerpo se calentase uniformemente, su temperatura aumentaría 8° en cada unidad de tiempo.

Ejercicios

1. Hallar la velocidad de variación de la función $y = 2x - 1$ para un x cualquiera.

2. El volumen v de un gas a la temperatura t se define por la fórmula

$$v = 1 + 0{,}0075\ t.$$

Determinar la velocidad de variación del volumen del gas para una temperatura cualquiera.

3. Hallar la velocidad de variación de la función $y = x^2$ cuando 1) $x = 1$, 2) $x = 3$.

4. La intensidad de la corriente en amperios varía en función del tiempo, conforme a la ley $i = 0{,}2\ t^2$, donde t son segundos. Hallar la velocidad de variación de la intensidad al final del cuarto segundo.

§ 63. La derivada de la función.

DEFINICIÓN. *Se llama derivada de la función* $y = f(x)$ *respecto al argumento* x *el límite* $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *de la relación entre el incremento de la función* Δy *y el incremento del argumento* Δx *cuando* $\Delta x \to 0$.

Para la derivada de la función $y = f(x)$ se han adoptado los símbolos:

$$y' \text{ ("}y \text{ tilde")},$$
$$f'(x) \text{ ("}f \text{ tilde de } x\text{")},$$
$$\frac{dy}{dx} \text{ ("}dy \text{ respecto a } dx\text{")},$$
$$y'_x \text{ ("}y \text{ tilde respecto a } x\text{")}.$$

Para simplificar, la derivada de una funcion dada analíticamente se anota entre paréntesis con tilde a la derecha. Por ejemplo, la derivada de la función $y = 2x^2 - 3x + 1$ puede escribirse así:

$$(2x^2 - 3x + 1)'.$$

De la definición de la derivada se deduce la regla siguiente:

Para determinar la derivada de la función $y = f(x)$ *respecto al argumento* x, *es necesario hallar:*

1) *el valor incrementado de la función, es decir,* $y + \Delta y$;
2) *el incremento de la función, o sea,* Δy;
3) *la razón del incremento de la función al incremento del argumento, o sea,* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
4) *el límite de esta razón cuando* $\Delta x \to 0$, *es decir,* $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

El proceso de cálculo de la derivada se denomina *diferenciación de la función*. La parte del análisis matemático que se ocupa de las cuestiones relacionadas con la derivada se llama *cálculo diferencial*.

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de la función $y = x^2 + x$.

SOLUCIÓN. 1er paso:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x).$$

2do paso:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - (x^2 + x) =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x + \Delta x - x^2 - x =$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x.$$

3er paso:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 1.$$

4° paso:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 1) = 2x + 1.$$

EJEMPLO 2. Diferenciar la función $y = \frac{2}{x}$.

SOLUCIÓN. 1er paso:

$$y + \Delta y = \frac{2}{x + \Delta x}.$$

2do paso:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = \frac{2}{x + \Delta x} - \frac{2}{x} =$$

$$= \frac{2x - 2x - 2\Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{2\,\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

3er paso:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\Delta x}{x(x + \Delta x)} : \Delta x = -\frac{2}{x(x + \Delta x)}.$$

4° paso:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{2}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{2}{x^2}.$$

La derivada de la función $y = f(x)$ es también función del argumento x.

EJEMPLO 3. Hallar el valor de la derivada de la función $f(x) = x^2 + x$ cuando $x = 3$.

SOLUCIÓN. Sustituyendo en la derivada ya calculada de esta función (véase el ejemplo 1) $x = 3$, obtendremos:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Sobre la base de la definición dada para la derivada, se pueden formular las definiciones de la velocidad de movimiento (§61) y de la velocidad de variación de la función (§62) del modo siguiente.

La velocidad del movimiento rectilíneo de un cuerpo en un instante dado es igual a la derivada del espacio respecto al tiempo, calculada para ese instante.

La velocidad de variación de la función para un valor dado del argumento es igual a la derivada de la función en este valor del argumento.

Ejercicios

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = 4x - 5$. 2. $y = 5x^2 + 1$. 3. $y = 4x^2 - 2x$. 4. $f(x) = -2x^2 + x$. 5. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. 6. $f(t) = -2t^3$. 7. $v = u^3 - u$. 8. $v = -\frac{4}{p}$.

9. Dada la función $f(x) = x^2 - 5x$. Hallar:
1) $f'(3)$, 2) $f'(2{,}5)$, 3) $f'(0)$, 4) $f'(-1)$.

§ 64. Relación entre la diferenciabilidad de la función y su continuidad.

TEOREMA. *Si la función* $y = f(x)$ *tiene derivada para algún valor de* x, *entonces para este valor de* x *la función dada es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que en cierto valor de x la función $y = f(x)$ es diferenciable, o sea, tiene derivada (§63)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

entonces, conforme a la definición del límite, podemos anotar:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De aquí

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x$$

y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (y' \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\alpha \Delta x) = 0$$

[$\lim_{\Delta x \to 0} (y' \Delta x) = 0$ como límite del producto de una constante por una infinitesimal, y $\lim_{\Delta x \to 0} (\alpha \Delta x) = 0$ como límite del producto de dos infinitesimales]. Pero la función para la que, para el valor dado del argumento, se verifica la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

es precisamente la que hemos llamado continua para ese valor del argumento (véase el §57). El teorema está demostrado.

La afirmación inversa no siempre es justa, por cuanto existen funciones continuas en todos sus puntos pero que no tienen derivada en ciertos valores de x.

§ 65. La tangente. Hemos definido la tangente a la circunferencia como la línea que tiene con ella un punto común. Esta definición no puede aplicarse a toda línea curva. Por ejemplo, la recta MN es tangente a la curva en el punto A (fig. 89), pero no tiene con esta curva un solo punto común,

sino dos. Por otra parte, la recta LR tiene con la curva un punto común C, sin embargo, no es tangente a ésta (fig. 89).

Para definir la tangente a la curva dada en el punto M (fig. 90), tomemos en ella un punto más M_1 y tracemos la secante MM_1. Si desplazamos el punto M_1 por la curva

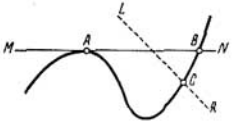


FIG. 89

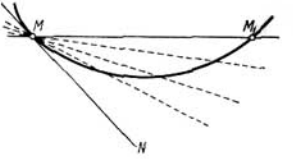


FIG. 90

de forma que se aproxime a M, tendiendo a fundirse con él, la secante MM_1 girará alrededor del punto M tendiendo a ocupar la posición de la recta MN llamada *tangente*.

DEFINICIÓN. *Se llama tangente a una curva dada, en un punto dado M de ésta, la posición límite de la secante MM_1 cuando el punto M_1, al desplazarse por la curva, se aproxima indefinidamente al punto M.*

En las matemáticas y las disciplinas técnicas, se trata frecuentemente la recta que pasa por el punto de tangencia M perpendicularmente a la tangente. Esta recta se llama *normal a la curva en el punto M*.

§66. Concepto geométrico de la derivada. Sea dada la función continua $y = f(x)$, cuyo gráfico está representado en la fig. 91. Tomemos en el el punto $M(x; y)$; entonces

$$OP = x \text{ y } PM = y.$$

Demos a x el incremento

$$PP_1 = \Delta x;$$

en este caso, al valor incrementado de la abscisa

$$OP_1 = x + \Delta x$$

e corresponderá el valor incrementado de la ordenada

$$P_1M_1 = f(x + \Delta x)$$

del punto M_1 de la curva. Tracemos desde el punto M la recta MQ paralela al eje Ox, y la secante que pasa por los

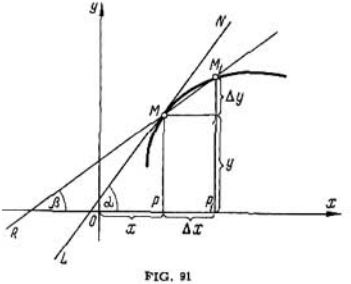


FIG. 91

puntos M y M_1. En el triángulo rectángulo M_1MQ obtenido

$$MQ = \Delta x;$$

$$QM_1 = P_1M_1 - PM = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y.$$

Designemos con β el ángulo que la secante M_1R forma con el sentido positivo del eje Ox; entonces,

$$\sphericalangle M_1MQ = \sphericalangle MRP = \beta.$$

Del triángulo M_1MQ tenemos:

$$QM_1 = MQ \operatorname{tg} \sphericalangle M_1MQ$$

o

$$\Delta y = \Delta x \operatorname{tg} \beta,$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta. \qquad (1)$$

La igualdad (1) evidencia que la razón del incremento de la función al incremento del argumento es igual a la tangente del ángulo que la secante M_1R forma con el sentido positivo del eje Ox.

Si $\Delta x \to 0$, entonces $\Delta y \to 0$, por cuanto la función dada es continua (§57). A consecuencia de esto, el punto M_1 se aproximará indefinidamente a M, y la secante M_1R girará

alrededor del punto M tendiendo a ocupar la posición de la tangente NL (§65).

Hallemos el límite de ambos miembros de la igualdad (1) cuando $\Delta x \to 0$; obtendremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta. \tag{2}$$

Como al girar la secante varía el ángulo que forma con el eje Ox, β se convierte en variable y en el límite tiende a la magnitud del ángulo formado por la tangente NL y la dirección positiva del eje Ox; por este motivo, designando $\sphericalangle NLP$ con la letra α, podemos anotar:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Ahora, la igualdad (2) puede transcribirse así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{3}$$

El miembro izquierdo de la igualdad (3) es la derivada de la función dada (§63), y el derecho, el coeficiente angular k de la tangente NL (§11):

$$y' = k. \tag{4}$$

Designando con a la abscisa del punto M, la igualdad (4) puede formularse así.

La derivada de la función $y = f(x)$ cuando $x = a$ es igual al coeficiente angular de la tangente trazada al gráfico de la función en su punto con la abscisa $x = a$.

PROBLEMA. Escribir la ecuación de la tangente trazada a la curva $y = x^2 + x$ en el punto M con la abscisa igual a 2.

SOLUCIÓN. Hallemos la ordenada del punto M de la curva

$$y = 2^2 + 2 = 6.$$

La tangente buscada se halla en el haz de rectas que pasan por el punto $M(2; 6)$ y definidas por la ecuación

$$y - 6 = k(x - 2).$$

Queda por determinar el coeficiente angular de la tangente, para lo que es necesario hallar la derivada de la función dada. Esta derivada ya fue determinada por nosotros; es

igual a $2x + 1$ (véase el §63, ejemplo 1) y define el coeficiente angular de la tangente trazada en un punto cualquiera de la curva dada. Para obtener el coeficiente angular de la tangente trazada en el punto dado $M(2; 6)$, en la expresión

$$y' = 2x + 1$$

es necesario sustituir x por su valor igual a 2. Obtendremos:

$$k = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

La ecuación buscada de la tangente se anotará de la siguiente forma:

$$y - 6 = 5(x - 2)$$

o

$$y = 5x - 4.$$

Ejercicios

1. Hallar el coeficiente angular de la tangente trazada a la curva $y = 3x^2$ en el punto de la misma cuya abscisa es igual a: 1) $x = 1$, 2) $x = 0$.

2. Determinar el ángulo que la tangente a la curva $y = 2x^2$ en el punto con la abscisa igual a $\frac{1}{4}$ forma con el sentido positivo del eje Ox.

3. ¿Qué ángulo forma con el sentido positivo del eje Ox la tangente trazada a la curva $y = \frac{1}{3}x^2$ en el punto con la abscisa igual a $-\frac{3}{2}$?

4. Escribir la ecuación de la tangente trazada a la curva $y = x^2 - 2$ en el punto con la abscisa igual a 2.

5. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal trazadas a la curva $y = 3x^2 + x$ en el punto con la abscisa $x = -1$.

Capítulo VIII
Fórmulas de diferenciación

En el §63 ha sido ofrecida la regla básica de determinación de la derivada. Sin embargo, su utilización ocupa mucho tiempo, representando grandes dificultades en numerosos casos. Por este motivo, es conveniente disponer de reglas que permitan hallar las derivadas de un modo más sencillo y con el gasto mínimo de tiempo. Estas reglas existen, en efecto; además, se deducen de la regla básica de diferenciación.

§ 67. Derivada de una constante. Sea C una magnitud constante; entonces, la igualdad

$$y = C$$

puede considerarse como expresión de una función que no varía de valor al variar el argumento. Esto se evidencia representando dicha igualdad en forma de gráfico, es decir, en forma de la recta AB paralela al eje Ox (fig. 92). En efecto, al variar la abscisa de los puntos de esta recta, sus ordenadas permanecen constantes.

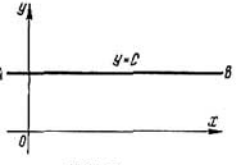


FIG. 92

Para calcular la derivada de la función $y = C$, empleemos la regla básica de diferenciación:

1er paso: $y + \Delta y = C$.

2do paso: $\Delta y = (y + \Delta y) - y = C - C = 0$.

3er paso: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

4o paso: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 0 = 0$.

De este modo,

$$(C)' = 0, \qquad \text{(I)}$$

o sea, *la derivada de una constante es igual a cero.*

§ 68. **Derivada de la función $y = x$.** Utilizando la regla básica de diferenciación, obtendremos:

1er paso: $y + \Delta y = x + \Delta x$.

2do paso: $\Delta y = (y + \Delta y) - y = x + \Delta x - x = \Delta x$.

3er paso: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

4o paso: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 1 = 1$.

Así, pues,

$$(x)' = 1, \qquad \text{(II)}$$

es decir, *la derivada de la función $y = x$ es igual a la unidad o la derivada de la variable independiente es igual a la unidad.*

§ 69. **Derivada de una suma algebraica de varias funciones.** Tomemos la función

$$y = u + v - w,$$

donde u, v y w son funciones de x que tienen derivadas respecto a x. Si al argumento x se le da el incremento Δx, las funciones u, v y w recibirán los incrementos Δu, Δv y Δw, respectivamente, y, por lo tanto, y recibirá también el incremento Δy.

Por la regla básica, hallamos:

1er paso: $y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)$.

2do paso: $\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w) - (u + v - w) = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w - u - v + w = \Delta u + \Delta v - \Delta w$.

3er paso: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \dfrac{\Delta w}{\Delta x}$.

4° paso: $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Los sumandos del miembro derecho de la última igualdad son las derivadas de las funciones u, v y w. Obtenemos: $y' = u' + v' - w'$, o

$$(u + v - w)' = u' + v' - w', \qquad \text{(III)}$$

o sea, *la derivada de una suma algebraica de un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de cada una de las funciones sumandos.*

§70. Derivada del producto de dos funciones. Sea dada la función

$$y = uv,$$

donde u y v son funciones de x que tienen derivadas respecto a x. Demos al argumento x el incremento Δx; entonces, de acuerdo con la regla, tenemos:

1er paso: $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$.

2do paso: $\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv =$

$$= uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v - uv =$$

$$= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v.$$

3er paso: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v}{\Delta x} + \frac{v\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

4° paso: $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) +$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right).$$

Pero u y v no dependen de Δx, por lo tanto, pueden considerarse constantes *) cuando $\Delta x \to 0$; de acuerdo con el corolario 1 del teorema IV del §45, podemos anotar:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Mas el incremento Δu de la función cambia al variar Δx; por lo tanto, conforme al teorema IV del § 45, tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Así, pues,

$$y' = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Pero

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'.$$

Luego, como la función u es diferenciable, es continua (§64); por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0.$$

---

*) Esto puede ilustrarse en la fig. 93. Aquí $OP = x$, $PP_1 = \Delta x$, $PM = u$. Si $\Delta x \to 0$, $PM = u$ no varía.

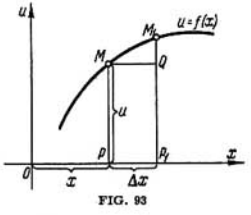


FIG. 93

Por lo tanto,

$$y' = uv' + vu' + 0 \cdot v' = uv' + vu'.$$

Así, pues,

$$(uv)' = uv' + vu', \qquad \text{(IV)}$$

es decir, *la derivada de un producto de dos funciones es la suma de los productos de la primera función por la derivada de la segunda y de la segunda función por la derivada de la primera.*

§ 71. Derivada del producto de una constante por una función. Tomemos la función

$$y = Cu,$$

donde

$$C = \text{const}, \quad u = f(x),$$

además, la función u tiene derivada respecto a x.

Aplicando la regla (IV), obtendremos:

$$y' = (Cu)' = Cu' + uC' = Cu' + u \cdot 0 = Cu',$$

$$(Cu)' = Cu', \qquad \text{(V)}$$

o sea, *la derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.*

§ 72. Derivada del cociente. Tomemos la función

$$y = \frac{u}{v},$$

donde u y v son funciones de x que tienen derivadas respecto a x; además $v \neq 0$ para el valor de x para que se determina la derivada. Apliquemos la regla básica de diferenciación.

1er paso: $y + \Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$.

2° paso: $\Delta y = (y + \Delta y) - y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \dfrac{u}{v} =$

$$= \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

3er paso: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$: $\Delta x = \dfrac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$.

4° paso: aplicando los teoremas V, III, II y el corolario 1 del teorema IV del §45, hallamos:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}[v(v+\Delta v)]} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}[v(v+\Delta v)]} =$$

$$= \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v[\lim\limits_{\Delta x\to 0} v + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v]} = \frac{vu' - uv'}{v(v+0)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Aquí, lo mismo que en la deducción de las fórmulas (IV), hay que considerar u y v no dependientes de Δx, y el $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$.

Así, pues,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \qquad \text{(VI)}$$

o sea, *la derivada del cociente es igual a un quebrado cuyo denominador es el cuadrado del divisor, y el numerador la diferencia entre el producto del divisor por la derivada del dividendo y el producto del dividendo por la derivada del divisor.*

§ 73. Concepto de función compuesta. Sean dadas dos funciones trigonométricas

$$y = \operatorname{sen} x \qquad (1)$$

e

$$y = \operatorname{sen}(x^2 - x). \qquad (2)$$

En la función (1) el argumento es x, y en la función (2), la expresión $x^2 - x$ dependiente de x, es decir, función de x. La función, cuyo argumento es otra función recibe el nombre de *función compuesta*.

Designemos

$$u = x^2 - x,$$

entonces, la función (2) puede anotarse así:

$$y = \operatorname{sen} u, \text{ donde } u = f(x) = x^2 - x.$$

Tomemos varias funciones más:

1) $y = (4x - 1)^3$,
2) $y = \sqrt{1 + x^2}$,
3) $y = \ln (2x + 3)$,
4) $y = a^{3x-1}$,
5) $y = \operatorname{arc\,tg}\ x^2$.

El argumento de todas estas funciones depende de x y, por lo tanto, son funciones compuestas. Designando con u cada uno de dichos argumentos, representemos estas funciones de la forma siguiente:

1) $y = u^3$, donde $u = f(x) = 4x - 1$,
2) $y = \sqrt{u}$, donde $u = f(x) = 1 + x^2$,
3) $y = \ln u$, donde $u = f(x) = 2x + 3$,
4) $y = a^u$, donde $u = f(x) = 3x - 1$,
5) $y = \operatorname{arc\,tg}\ u$, donde $u = f(x) = x^2$.

§ 74. Derivada de la potencia con exponente entero positivo. Sea dada la función

$$y = u^m, \tag{1}$$

donde $u = f(x)$ y m es un número entero positivo. Como se ve, la función (1) es una función compuesta. Se requiere hallar su derivada.

Supongamos que la función u tiene derivada respecto a x*) Examinemos primero la función

$$y = u^2.$$

Representándola en forma de producto y aplicando la regla (IV), obtendremos:

$$y'_x = (u^2)'_x = (u \cdot u)'_x = uu'_x + u'_x u = 2uu'_x;$$
$$(u^2)'_x = 2uu'_x. \tag{2}$$

Como se ve, el miembro derecho de la igualdad (2) está compuesto conforme a la siguiente ley: su primer factor es

*) A continuación, al calcular la derivada de la función $y = f(u)$, supondremos que la función u es diferenciable.

el exponente de la potencia dada; el segundo, la base u elevada a la potencia disminuida en uno, y el tercero, la derivada u'_x.

Para cerciorarnos de que la derivada de la función u^m se define por esta misma ley, utilicemos el método de inducción matemática.

Supongamos que se verifica la igualdad

$$(u^m)'_x = mu^{m-1}u'_x. \tag{3}$$

Demostremos que la derivada de la función u^{m+1} se rige también por esa misma ley. Para ello, representemos u^{m+1} en forma de producto $u^m u$, y después hallemos su derivada por la regla (IV). Tomando en consideración la igualdad (3), obtendremos:

$$(u^{m+1})'_x = (u^m u)'_x = u^m u'_x + u(u^m)'_x = u^m u'_x + umu^{m-1}u'_x =$$

$$= u^m u'_x + mu^m u'_x = u^m u'_x(1 + m) = (m + 1)\, u^m u'_x.$$

Por consiguiente, si $(u^m)'_x = mu^{m-1}u'_x$, también

$$(u^{m+1})'_x = (m + 1)\, u^m u'_x.$$

Hemos visto que la ley indicada se verifica para $(u^2)'_x$; por lo tanto, conforme a lo demostrado, esta ley se verificará también para $(u^3)'_x$; y si se verifica para $(u^3)'_x$, se verificará también para $(u^4)'_x$, etc.

Así, pues, para todo exponente entero positivo m tenemos:

$$(u^m)'_x = mu^{m-1}u'_x. \tag{VII}$$

Por lo tanto, *la derivada de la función potencial* $y = u^m$, *donde* $u = f(x)$ *y* m *es un número entero positivo, es igual al producto de tres factores el primero de los cuales es el exponente de la potencia dada; el segundo, la base elevada a esa potencia disminuida en uno, y el tercero, la derivada de la base respecto a* x.

Si $u = x$, entonces $u'_x = x' = 1$ y la fórmula (VII) tomará la forma

$$(x^m)'_x = mx^{m-1}. \tag{VII*}$$

Nota. A partir del párrafo siguiente, utilizaremos la fórmula (VII) para cualesquiera exponentes (fraccionarios y enteros), aunque esto será demostrado más adelante, en el *§ 80*.

§ 75. Derivada de la función $y = \sqrt{u}$. Hallemos la derivada de la función

$$y = \sqrt{u}, \text{ donde } u = f(x).$$

Representando la función dada en forma de potencia con exponente fraccionario y aplicando luego la regla (VII), tenemos:

$$y'_x = (\sqrt{u})'_x = (u^{\frac{1}{2}})'_x = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u'_x = \frac{u'_x}{2\sqrt{u}}.$$

Así, pues,

$$(\sqrt{u})'_x = \frac{u'_x}{2\sqrt{u}}, \qquad \text{(VIII)}$$

o sea, *la derivada de la función* $y = \sqrt{u}$, *donde* $u = f(x)$, *es igual a la derivada del radicando respecto a* x *dividida entre la función duplicada.*

Cuando $u = x$, la fórmula (VIII) toma la forma siguiente:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad \text{(VIII*)}$$

§ 76. Derivada de la función $y = \frac{1}{u}$. Sea dada la función

$$y = \frac{1}{u}, \text{ donde } u = f(x).$$

Sustituyendo $\frac{1}{u}$ por u^{-1} y diferenciando la función obtenida, por la regla (VII), tendremos:

$$y'_x = \left(\frac{1}{u}\right)'_x = (u^{-1})'_x = -1 \cdot u^{-2} u'_x = -\frac{u'_x}{u^2},$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)'_x = -\frac{u'_x}{u^2}, \qquad \text{(IX)}$$

o sea, *la derivada de la función* $y = \frac{1}{u}$, *donde* $u = f(x)$, *es igual al cociente de dividir la derivada respecto a* x *del denominador entre el cuadrado del denominador, tomado con el signo menos.*

Cuando $u = x$, la fórmula (IX) toma la forma

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \qquad (IX^*)$$

§ 77. Aplicación de las fórmulas de diferenciación. Examinemos varios ejemplos de aplicación de las reglas deducidas.

EJEMPLO 1. Diferenciar la función

$$y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3.$$

SOLUCIÓN. Por la regla (III), tenemos:

$$y' = (2x^3)' - (4x^2)' + (5x)' - (3)'.$$

Aplicando a los tres primeros sumandos la regla (V), y al último, la (I), obtendremos:

$$y' = 2(x^3)' - 4(x^2)' + 5 \cdot x' - 0.$$

De acuerdo con las reglas (VII*) y (II), tenemos:

$$y' = 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 6x^2 - 8x + 5.$$

EJEMPLO 2. Diferenciar la función

$$y = (x^2 + 1)(2x + 3).$$

SOLUCIÓN. Por la regla (IV), tenemos:

$$y' = (x^2 + 1)(2x + 3)' + (2x + 3)(x^2 + 1)'.$$

Por la regla (III):

$$y' = (x^2 + 1)[(2x)' + (3)'] + (2x + 3)[(x^2)' + (1)'].$$

Por las reglas (V), (II), (I) y (VII*):

$$y' = (x^2 + 1)(2 + 0) + (2x + 3)(2x + 0) =$$

$$= 2x^2 + 2 + 4x^2 + 6x = 6x^2 + 6x + 2.$$

Este ejemplo puede resolverse de otra forma: primero, multiplicar las expresiones entre paréntesis y, luego, diferenciar la suma obtenida:

$$y = (x^2 + 1)(2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3,$$

$$y' = (2x^3 + 3x^2 + 2x + 3)' = 6x^2 + 6x + 2.$$

EJEMPLO 3. Diferenciar la función $y = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUCIÓN. Transformemos esta función del modo siguiente:

$$y = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 2xx^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{7}{6}}.$$

Aplicando las reglas (V) y (VII*), obtendremos:

$$y' = (2x^{\frac{7}{6}})' = 2(x^{\frac{7}{6}})' = 2 \cdot \frac{7}{6} x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{3}\sqrt[6]{x}.$$

EJEMPLO 4. Diferenciar la función

$$y = \frac{2}{x} - 3\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

SOLUCIÓN. Representemos la función dada en la siguiente forma:

$$y = 2 \cdot \frac{1}{x} - 3\sqrt{x} + 4 \cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

Aplicando las reglas (III) y (V), obtendremos:

$$y' = 2\left(\frac{1}{x}\right)' - 3(\sqrt{x})' + 4(x^{-\frac{1}{3}})'.$$

Por las reglas (IX*), (VIII*) y (VII*), tenemos:

$$y' = 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 4\left(-\frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}-1}\right) =$$

$$= -\frac{2}{x^2} - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{3x^{\frac{4}{3}}} = -\left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}\right).$$

EJEMPLO 5. Diferenciar la función

$$y = \frac{x^2 + x - 3}{2x}.$$

SOLUCIÓN. Conforme a la regla (VI), tenemos:

$$y' = \frac{2x(x^2 + x - 3)' - (x^2 + x - 3)(2x)'}{(2x)^2}.$$

Diferenciando la suma según la regla (III), obtendremos:

$$y' = \frac{2x[(x^2)' + (x)' - (3)'] - (x^2 + x - 3)(2x)'}{4x^2}.$$

Por último, según las reglas (VII*), (II), (I) y(V), hallaremos:

$$y' = \frac{2x(2x + 1) - (x^2 + x - 3) \cdot 2}{4x^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 2x + 6}{4x^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 6}{4x^2} = \frac{x^2 + 3}{4x^2}.$$

Esta función puede diferenciarse de otro modo, dividiendo, término a término, el numerador del miembro derecho de la ecuación dada entre el denominador del mismo. Obtendremos:

$$y = \frac{x^2 + x - 3}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2x},$$

o

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x};$$

de aquí

$$y' = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2}(x)' + \left(\frac{1}{2}\right)' - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} + 0 - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x^2} = \frac{x^2 + 3}{2x^2}.$$

EJEMPLO 6. Diferenciar la función

$$y = (x^3 - 4x + 1)^3.$$

SOLUCIÓN. La función dada es potencial; su base es la expresión $x^3 - 4x + 1$ dependiente de x. Por lo tanto, la función a diferenciar debe considerarse como una función

compuesta. Aplicando la regla (VII) con $u = x^3 - 4x + 1$ y $m = 3$, obtenemos:

$$y'_x = [(x^3 - 4x + 1)^3]'_x = 3(x^3 - 4x + 1)^2 (x^3 - 4x + 1)' =$$
$$= 3(x^3 - 4x + 1)^2 (3x^2 - 4).$$

EJEMPLO 7. Diferenciar la función

$$y = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}.$$

SOLUCIÓN. El radicando es función de x; por lo tanto, y es una función compuesta. De acuerdo con la regla (VIII) y suponiendo $u = 2x^2 - 3x + 4$, tenemos:

$$y' = (\sqrt{2x^2 - 3x + 4})'_x = \frac{(2x^2 - 3x + 4)'}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}} = \frac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}}.$$

Si se da una raíz con otro exponente, es necesario transformarla previamente en potencia con exponente fraccionario y, después, aplicar la regla (VII). Por ejemplo,

$$(\sqrt[3]{x^2 + 1})'_x = [(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} x (x^2 + 1)' =$$
$$= \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$$

(aquí $u = x^2 + 1$).

Ejercicios

Hallar las derivadas de las funciones:

1. $y = 3$. 2. $f(x) = ax$. 3. $y = x^5$. 4. $f(x) = x^p$. 5. $y = 5x^3$ 6. $s = -3t^4$. 7. $f(x) = \frac{3}{4} ax^6$. 8. $f(x) = \frac{2}{n+1} x^{n+1}$. 9. $y = 2x^3 - 3x$. 10. $s = \frac{3}{4} t^4 - \frac{1}{2} t^2 + 2t$. 11. $f(x) = -\frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 2x + 1$.

Hallar $f'(3)$. 12. $f(x) = \frac{2}{2n+1} x^{2n+1} - \frac{1}{2n} x^{2n}$. 13. $y = x(x + 1)$. 14. $s = t^2(3t - 2)$. 15. $f(x) = 2x(3x^2 - x + 5)$. Hallar $f'(-2)$. 16. $s = t(t + 1)(t + 2)$. 17. $f(u) = (2u^2 + u)(4u^2 - 1)$. 18. $s = 2\sqrt{x}$.

19. $y = -\sqrt[4]{x^3}$. 20. $s = r\sqrt{r}$. 21. $v = u^2\sqrt[3]{u}$. 22. $v = \frac{4}{3\rho}$. 23. $f(r) = \frac{1}{r^2}$. Hallar $f'(-2)$. 24. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. 25. $f(u) = \frac{u}{\sqrt[3]{u}}$. Hallar $f'(8)$.

26. $f(v) = \frac{\sqrt[3]{v}}{v^2}$. 27. $y = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$. 28. $y = x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$. 29. $s = \frac{6t\sqrt[3]{t}}{t}$.

30. $u = \frac{6\sqrt{\varphi}\sqrt[3]{\varphi}}{\sqrt[4]{\varphi^2}}$. 31. $y = \frac{2n}{2n+1}x^2\sqrt[3]{x}$. 32. $y = t(\sqrt{t}+1)$. 33. $s = \frac{t^2-t+1}{t^2}$. 34. $y = \frac{2x^2+3x+1}{x+1}$. 35. $y = \frac{3x^2-2x-4}{2x-1}$.

36. $y = \frac{x^2}{2-x}$. 37. $f(u) = \frac{2}{u+1}$. 38. $f(v) = \frac{1}{v^2+1}$. 39. $y = -\frac{1+2x}{x(1+x)}$. 40. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{x}$. 41. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

42. ¿En qué valores de x la derivada de la función

$$y = x^3 - 2x^2 - 4x - 5$$

es igual a 1) 0; 2) 3?

43. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva

$$y = 1 - 2x^2$$

en el punto con la abscisa igual a $\frac{1}{2}$.

44. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $xy = 2$ en su punto $A(2; 1)$.

45. Se ha trazado una tangente a la curva $y = 3x^2 - 6x + 5$, paralela al eje Ox. Hallar las coordenadas del punto de tangencia.

46. ¿En qué punto de la curva $y = 2x^2 - x + 1$ hay que trazar la tangente paralela a la recta $y = 3x + 5$?

47. Un punto, al desplazarse por la curva $y = x^2 - 8x + 15$, se separó de ella en el instante en que se encontró en la recta $x = 6$. Hallar la ecuación de la ulterior trayectoria del punto.

48. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

en su punto $A(0; 0)$.

49. Demostrar que las curvas

$$y = 2x^2 + 2x - 3, \qquad y = x^3 - 2x + 5$$

tienen una tangente común en el punto $A(2; 9)$. Hallar la ecuación de esta tangente.

50. En la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$, **determinar** b y c si la recta $y = x$ es tangente a la parábola en el punto con la abscisa $x = 2$.

51. La cantidad de electricidad que pasa por un conductor en t segundos se define por la fórmula $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (colombios). **Hallar** la intensidad de la corriente al final del quinto segundo.

52. Un punto se desplaza en línea recta conforme a la ley $S = \frac{1}{2}\sqrt{t}$. Hallar su velocidad en el instante $t = 2{,}25$.

53. El movimiento de un punto está definido por la ecuación $S = t^2 - 4t + 20$. ¿En qué instante de tiempo su velocidad será nula?

54. El movimiento de un punto viene dado por la ecuación

$$S = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2.$$

1) ¿En qué instantes de tiempo se hallará en el punto inicial?

2) ¿En qué instantes de tiempo su velocidad será nula?

55. Una bala sale disparada de una pistola hacia arriba a la velocidad de 300 m/s. Hallar la velocidad de la bala en el instante $t = 10$ s y determinar cuánto tiempo se elevará la bala. No se tiene en cuenta la velocidad de aire.

Nota. La altura S (en metros) que alcanza en t segundos un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba a la velocidad de v_0 m/s se define por la fórmula $S = v_0 t - 4{,}9t^2$.

56. Desde el tejado de una casa de 50 m de altura, se ha lanzado verticalmente hacia arriba una pelota a la velocidad de 20 m/s. Hallar:

1) la velocidad de elevación al final del segundo segundo,

2) el instante de comienzo de la caída y

3) la altura máxima de elevación respecto a la superficie de la tierra.

57. Un cuerpo cuya masa $m = 3$ kg se mueve en línea recta conforme a la ley $S = 1 + t + t^2$, donde S se expresa en centímetros y t, en segundos. Hallar la energía cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ pasados 5 segundos después del inicio del movimiento.

58. El ángulo de giro de una polea en función del tiempo se calcula por la igualdad $\varphi = t^2 + 3t - 5$. Hallar:

1) la velocidad angular media en el intervalo de tiempo desde $t = 3$ hasta $t = 5$ y 2) la velocidad angular en el instante de tiempo $t = 5$.

59. Un cuerpo gira alrededor de un eje; la ley de variación del ángulo φ en función del tiempo t viene dada por la igualdad $\varphi = 0{,}1\,t^2$. Hallar la velocidad angular de rotación del cuerpo en el instante $t = 5$.

60. El ángulo φ que barre una rueda al cabo de t segundos se determina por la igualdad

$$\varphi = at^2 - bt + c,$$

donde a, b y c son constantes. Hallar:

1) la velocidad angular de rotación de la rueda y

2) el instante de su parada.

61. Una rueda gira de modo que el ángulo de giro es proporcional al cuadrado del tiempo. La rueda dio la primera vuelta en 8 segundos.

Hallar la velocidad angular de la rueda pasados 32 segundos desde el inicio del movimiento (de la rotación).

Hallar las derivadas de las funciones:

62. $y = (x + 2)^4$. 63. $S = (3t - 2)^3$. 64. $y = (x^3 - 1)^5$. 65. $f(x) = (x^2 - 2x)^3$. 66. $S = (t^3 - t + 1)^4$. 67. $f(u) = 5(3u^3 - u + 4)^4$.

68. $S = \sqrt{t + 1}$. 69. $y = \sqrt{2x + 1}$. 70. $y = \sqrt{2px}$. 71. $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

72. $y = 2\sqrt{1 + 2x - x^2}$. 73. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. 74. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

75. $v = \sqrt{(2 - x)(3 + 2x)}$. 76. $r = \sqrt[3]{p^3 - 1}$. 77. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1}$.

78. $y = (3x - 1)^2 (x + 1)^3$. 79. $S = t^2\sqrt{4t - 3}$. 80. $y = x\sqrt{1 - x}$.

81. $y = (x - 1)\sqrt{x^2 + 1}$. 82. $y = (x + 1)^2\sqrt{x - 1}$. 83. $y = x^2\sqrt[3]{x^3 + 1}$.

84. $\theta = \frac{(2\varphi^2 - 1)^2}{\varphi^2}$. 85. $y = \frac{5x^3}{(5x - 4)^3}$. 86. $y = \sqrt{\frac{2}{x}}$. 87. $y = \sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}$. 88. $y = \sqrt{\frac{2}{2x^2 + 1}}$. 89. $y = \frac{2x}{\sqrt{x - 1}}$. 90. $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$. 91. $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. 92. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. 93. $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}$. 94. $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$. 95. $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$. 96. $v = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}}$.

§ 78. Derivadas de las funciones trigonométricas.

I. Se da la *función*

$$y = \operatorname{sen} u, \text{ donde } u = f(x).$$

Si el argumento x recibe el incremento Δx, entonces u e y recibirán los incrementos Δu y Δy, respectivamente.

Operemos conforme a la regla general de diferenciación.

1er paso: $y + \Delta y = \operatorname{sen}(u + \Delta u)$.

2do paso: $\Delta y = (y + \Delta y) - y = \operatorname{sen}(u + \Delta u) - \operatorname{sen} u$. (1)

De acuerdo con la fórmula de la diferencia de los senos de dos ángulos, la igualdad (1) se convierte en la siguiente:

$$\Delta y = 2 \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\Delta u}{2}.$$

3er paso: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\Delta u}{2}}{\Delta x}$.

Multipliquemos por $\frac{\Delta u}{2}$ el numerador y el denominador del quebrado obtenido en el miembro derecho de la igualdad:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}\cdot\frac{\Delta u}{2}}{\Delta x\cdot\frac{\Delta u}{2}},$$

o

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}\cdot 2\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}\cdot\Delta x} = \cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Como la función u es diferenciable respecto a x, entonces

$$\Delta u \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0.$$

Tomado esto en consideración, pasemos al siguiente paso aplicando el teorema del límite del producto de variables (§45).

4° paso:

$$y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Pero

$$\lim_{\Delta u\to 0}\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right) = \cos u, \quad \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}} = 1 \quad (\S\,48),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x;$$

por lo tanto,

$$y'_x = \cos u\cdot 1\cdot u'_x.$$

Así, pues,

$$(\operatorname{sen} u)'_x = \cos u \cdot u'_x. \qquad (X)$$

Cuando $u = x$, la fórmula (X) se convierte en la siguiente:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x. \qquad (X^*)$$

II. Se da la función

$$y = \cos u, \text{ donde } u = f(x).$$

Para hallar su derivada puede emplearse la fórmula general; sin embargo, es más sencillo operar como sigue.

Por la fórmula de reducción, anotaremos

$$y = \cos u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right).$$

De aquí

$$y'_x = (\cos u)'_x = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right]'_x. \qquad (2)$$

En el miembro derecho de la igualdad (2) tenemos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ que es una función compuesta. Empleando la fórmula (X) para su diferenciación, hallaremos

$$\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right]'_x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\left(\frac{\pi}{2} - u\right)'_x =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(0 - u'_x) = -\operatorname{sen} u \cdot u'_x.$$

De este modo,

$$(\cos u)'_x = -\operatorname{sen} u \cdot u'_x. \qquad (XI)$$

Si $u = x$, la fórmula (XI) tomará la forma

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x. \qquad (XI^*)$$

III. Se da la función

$$y = \operatorname{tg} u, \text{ donde } u = f(x).$$

Representemos tg u en forma de cociente

$$y = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

y apliquemos la fórmula (VI) para su diferenciación. Obtendremos

$$y'_x = \left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)'_x = \frac{\cos u\,(\operatorname{sen} u)' - \operatorname{sen} u\,(\cos u)'}{\cos^2 u}.$$

Pero

$$(\operatorname{sen} u)' = \cos u \cdot u'_x \text{ [regla (X)]},$$
$$(\cos u)' = -\operatorname{sen} u \cdot u'_x \text{ [regla (XI)]},$$

por lo tanto,

$$y'_x = \frac{\cos u \cos u \cdot u'_x - \operatorname{sen} u\,(-\operatorname{sen} u)\,u'_x}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)\,u'_x}{\cos^2 u} = \frac{u'_x}{\cos^2 u}.$$

Así, pues,

$$(\operatorname{tg} u)'_x = \frac{u'_x}{\cos^2 u}. \qquad \text{(XII)}$$

Si $u = x$, entonces,

$$(\operatorname{tg} x)'_x = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \text{(XII*)}$$

IV. Se da la función

$$y = \operatorname{ctg} u, \text{ donde } u = f(x).$$

Lo mismo que en el caso anterior, anotaremos

$$y = \operatorname{ctg} u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}.$$

Empleando las reglas (VI), (X) y (XI), obtendremos

$$y'_x = \left(\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}\right)'_x = \frac{\operatorname{sen} u\,(\cos u)' - \cos u\,(\operatorname{sen} u)'}{\operatorname{sen}^2 u} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} u\,(-\operatorname{sen} u)\,u'_x - \cos u \cos u \cdot u'_x}{\operatorname{sen}^2 u} =$$

$$= -\frac{(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)\,u'_x}{\operatorname{sen}^2 u} = -\frac{u'_x}{\operatorname{sen}^2 u},$$

$$(\operatorname{ctg} u)'_x = -\frac{u'_x}{\operatorname{sen}^2 u}. \qquad \text{(XIII)}$$

En el caso de $u = x$, tenemos

$$(\operatorname{ctg} x)'_x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \qquad \text{(XIII*)}$$

EJEMPLO 1. Diferenciar la función

$$y = \cos\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

SOLUCIÓN. De acuerdo con la regla (XI), cuando $u = 1 + \frac{1}{x}$, hallaremos

$$y'_x = \left[\cos\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]' = -\operatorname{sen}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)'.$$

Por las reglas (III) y (IX*) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)' = 0 - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$, por lo tanto, la derivada buscada

$$y'_x = -\operatorname{sen}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

EJEMPLO 2. Diferenciar la función

$$y = \operatorname{sen}^2 \sqrt{x}.$$

SOLUCIÓN. Transcribamos la función dada así

$$y = (\operatorname{sen} \sqrt{x})^2.$$

Vemos que y es una función potencial de $u = \operatorname{sen} \sqrt{x}$. Hallaremos su derivada por la fórmula (VII):

$$y'_x = [(\operatorname{sen} \sqrt{x})^2]' = 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} (\operatorname{sen} \sqrt{x})'.$$

Pero $\operatorname{sen} \sqrt{x}$ es una función trigonométrica de $\sqrt{x}$. Por la regla (X) (cuando $u = \sqrt{x}$), hallaremos

$$(\operatorname{sen} \sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} (\sqrt{x})'.$$

Por último, según la regla (VIII*), tenemos

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Por consiguiente,

$$y'_x = 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

El proceso de diferenciación de la función dada puede anotarse mediante la siguiente cadena de igualdades:

$$y'_x = (\operatorname{sen}^2 \sqrt{x})' = 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} (\operatorname{sen} \sqrt{x})' =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} (\sqrt{x})' =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Ejercicios

Hallar las derivadas de las funciones:

1. $y = x - \operatorname{sen} x$. **2.** $\theta = \varphi \cos \varphi$. **3.** $v = \sec u$. **4.** $f(t) = \operatorname{sen} t \cos t$. **5.** $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$. **6.** $s = \operatorname{tg} \theta - \theta$. **7.** $\theta = \varphi + \operatorname{ctg} \varphi$. **8.** $s = a(1 - \cos t)$. **9.** $f(\theta) = (1 + \cos \theta) \operatorname{sen} \theta$. **10.** $v = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$. **11.** $f(\theta) = \frac{1 + \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta}$. **12.** $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$. **13.** $v = -\frac{1}{4} \cos^4 \omega$. **14.** $f(\varphi) = -\operatorname{ctg}^5 \varphi$. Hallar $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. **15.** $f(\varphi) = \operatorname{sen} 2\varphi$. **16.** $f(\omega) = \frac{1}{2} \cos 2\omega$. **17.** $y = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{q} x\right)$. **18.** $y = -a \cos\left(\frac{\pi}{a} t\right)$. **19.** $s = \cos(1 - 2\varphi)$. **20.** $f(\omega) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega^2$. **21.** $t = 2 \operatorname{sen} (\varphi^2 - \varphi)$. **22.** $f(\theta) = \operatorname{sen} \sqrt{\theta}$. **23.** $s = -\sqrt{\cos t}$. **24.** $y = 4 \operatorname{tg} 2\sqrt{x}$. **25.** $y = \sqrt[4]{\operatorname{sen} x}$. **26.** $s = \cos \frac{1}{t}$. **27.** $s = \operatorname{sen} \frac{a}{t}$. **28.** $y = \frac{1}{2} \sec^2 \omega$. **29.** $y = \sqrt{\sec x}$. **30.** $y = \operatorname{sen}^3 x \cos x$. **31.** $f(t) = 2 \operatorname{sen} 2t \cos^2 t$. **32.** $f(\theta) = 2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta$. **33.** $y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$. **34.** $y = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x$. **35.** $y = \operatorname{sen} (x + a) \cos (x - a)$. **36.** $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$. **37.** $\theta = \operatorname{sen}^2 2\varphi$. **38.** $y = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$. **39.** $s =$

$= \sqrt{\operatorname{sen} 2\varphi}$. **40.** $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \frac{1}{x}$. **41.** $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen} 2x}$. **42.** $0 = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 2\omega}$.

43. $r = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \frac{\omega}{2} - \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$. **44.** $y = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$.

45. Un punto se desplaza en línea recta conforme a la ley $S = a \cos \frac{\pi t}{2}$. Hallar:

1) la velocidad del punto para un instante de tiempo cualquiera,
2) en que valores de t la velocidad del punto es nula y
3) el recorrido del punto en el tiempo $t = 0;\ 2;\ 4;\ 6$.

§ 79. Derivada de la función logarítmica. Se da la función

$$y = \ln u, \quad \text{donde} \quad u = f(x).$$

Para su diferenciación, seguiremos la regla general:

1er paso: $y + \Delta y = \ln (u + \Delta u)$.

2do paso: $\Delta y = (y + \Delta y) - y = \ln (u + \Delta u) - \ln u$,

ó

$$\Delta y = \ln \frac{u + \Delta u}{u} = \ln \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right).$$

3er paso: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta x}$.

Multipliquemos por Δu el numerador y el denominador del quebrado obtenido en el miembro derecho de la igualdad. Se obtendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u} \ln \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Supongamos

$$\frac{\Delta u}{u} = \alpha. \qquad (2)$$

Entonces, la igualdad (1) se transcribirá así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\alpha} \ln (1 + \alpha) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

o, después de la potenciación.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{u} \ln(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

Como la función u tiene derivada respecto a x,

$$\Delta u \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0 \quad (\S\ 64);$$

pero entonces, de la igualdad (2) se deduce que también

$$\alpha \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0 \tag{4}$$

(ya que, en el quebrado $\frac{\Delta u}{u}$ el denominador u no depende de Δx y, por lo tanto, puede considerarse constante cuando $\Delta x \to 0$).

4º paso: Hallemos el límite de ambos miembros de la igualdad (3) aplicando la regla (4) del § 45:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{u} \lim_{\Delta x \to 0} [\ln (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}] \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(aquí hemos sacado del signo de límite el factor constante $\frac{1}{u}$, o sea, no dependiente de Δx). Tomando en consideración (4), obtendremos

$$y'_x = \frac{1}{u} \lim_{\alpha \to 0} [\ln (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}] \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{5}$$

Ocupémonos de la expresión

$$\lim_{\alpha \to 0} [\ln (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]. \tag{6}$$

En los cursos detallados de análisis matemático se demuestra el siguiente teorema: *el límite del logaritmo de una variable es igual al logaritmo del límite de esa variable*. Por lo tanto

$$\lim_{\alpha \to 0} [\ln (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}] = \ln [\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]. \tag{7}$$

Pero

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad (\S\ 50)$$

por lo tanto, sustituyendo en el miembro derecho de la igualdad (7) e en lugar de $\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, obtendremos $\ln e = 1$.

Así, pues, la expresión (6) es igual a la unidad y, por este motivo, la igualdad (5) toma la forma

$$y'_x = \frac{1}{u} \cdot 1 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{u} u'_x,$$

$$(\ln u)'_x = \frac{u'_x}{u}. \qquad \text{(XIV)}$$

La fórmula obtenida se lee así: *la derivada del logaritmo natural* $y = \ln u$, *donde* $u = f(x)$ es *igual al cociente de dividir la derivada respecto a* x *del argumento del logaritmo entre este argumento.*

Cuando $u = x$, la fórmula (XIV) se transforma en la siguiente:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad \text{(XIV*)}$$

Si viene dado el logaritmo decimal, es necesario expresarlo previamente por el natural. Sabemos (§ 51) que

$$\log u = 0{,}4343 \ln u.$$

Diferenciando ambas partes de esta igualdad respecto a x, se obtendrá

$$(\log u)'_x = (0{,}4343 \ln u)'_x = 0{,}4343 \cdot (\ln u)'_x = 0{,}4343 \frac{u'_x}{u}$$

o

$$(\log u)'_x = \frac{u'_x}{u} \cdot 0{,}4343, \qquad \text{(XV)}$$

es decir, *la derivada del logaritmo decimal* $y = \log u$, *donde* $u = f(x)$, *es igual al producto de la derivada del logaritmo natural por el factor constante* 0,4343.

Cuando $u = x$ se tiene

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \cdot 0{,}4343. \qquad \text{(XV*)}$$

EJEMPLO 1. Diferenciar la función

$$y = \ln (2x + 1).$$

SOLUCIÓN. Por la regla (XIV), cuando $u = 2x + 1$, se obtendrá

$$y'_x = [\ln (2x + 1)]' = \frac{(2x + 1)'}{2x + 1} = \frac{2}{2x + 1}.$$

EJEMPLO 2. Diferenciar la función

$$y = \ln \cos (1 - x).$$

SOLUCIÓN. Por la regla (XIV), hallaremos

$$y'_x = [\ln \cos (1 - x)]' = \frac{[\cos (1 - x)]'}{\cos (1 - x)}.$$

Por la regla (XI)

$$[\cos (1 - x)]' = -\operatorname{sen} (1 - x)\,(1 - x)' =$$
$$= -\operatorname{sen} (1 - x) \cdot (-1) = \operatorname{sen} (1 - x).$$

El proceso de diferenciación de la función dada puede anotarse mediante la siguiente cadena de igualdades:

$$y'_x = [\ln \cos (1 - x)]' = \frac{1}{\cos (1 - x)} \cdot [\cos (1 - x)]' =$$

$$= \frac{1}{\cos (1 - x)} \cdot [-\operatorname{sen} (1 - x)] \cdot (1 - x)' =$$

$$= \frac{1}{\cos (1 - x)} \cdot [-\operatorname{sen} (1 - x)] \cdot (-1) = \operatorname{tg} (1 - x).$$

EJEMPLO 3. Diferenciar la función

$$y = \ln \sqrt{\frac{x}{1 + 2x}}.$$

SOLUCIÓN. Primero, transformemos la función dada, aplicando la regla de logaritmación de la raíz:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1 + 2x}.$$

Utilizando sucesivamente las reglas (V), (XIV) y (VI) para la diferenciación de la función dada, hallaremos:

$$y' = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x}{1+2x}\right)\right]' = \frac{1+2x}{2\cdot x}\left(\frac{x}{1+2x}\right)' =$$

$$= \frac{(1+2x)\,(1+2x-2x)}{2x(1+2x)^2} = \frac{1}{2x(1+2x)}.$$

Ejercicios

Hallar las derivadas de las funciones:

1. $y = x \ln x$. **2.** $\theta = t(\ln t - 1)$. **3.** $f(u) = \dfrac{\ln u}{u}$. **4.** $y = \log 2x$.

5. $f(x) = 2 \log (x + 1)$. Hallar $f'(1)$. **6.** $s = \ln (t^2 - 1)$. **7.** $u = \ln \dfrac{1}{v}$.

8. $t = \ln \operatorname{sen} \alpha$. **9.** $y = -\ln \cos t$. **10.** $f(t) = \ln (2 \cos t)$. **11.** $f(\theta) =$

$= \ln \operatorname{tg} \theta$. Hallar $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. **12.** $y = \ln^2 x$. **13.** $u = 10 \ln \dfrac{4}{4+t}$.

14. $f(x) = \ln \dfrac{a+x}{a-x}$. **15.** $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$. **16.** $y = \ln (\ln x)$.

17. $y = \ln^2 x^2$. **18.** $y = \ln \dfrac{x^2}{1-x^2}$. **19.** $f(u) = \ln \operatorname{sen} \dfrac{u}{3}$. **20.** $y =$

$= \ln^3 \operatorname{sen} x$. **21.** $f(x) = \ln \operatorname{sen} \dfrac{x-a}{x}$. **22.** $s = \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}$.

23. $y = \ln^2 \sqrt{x}$. **24.** $y = \sqrt{\ln \operatorname{tg} x}$. **25.** $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$.

26. $s = \ln \cos^2 (1 - t)$. **27.** $y = \ln \sec^2 x$. **28.** $y = \ln \operatorname{sen} x -$

$- \dfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$. **29.** $f(x) = \ln \sqrt{a^2 + x^2}$. **30.** $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$.

31. $y = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$. **32.** $y = \ln (1 + x + \sqrt{2x + x^2})$.

33. $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. **34.** $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$. **35.** $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$.

36. $y = x[\cos (\ln x) + \operatorname{sen} (\ln x)]$.

§ 80. Derivada de la potencia con cualquier exponente. En el § 74 hemos deducido la fórmula

$$(u^m)'_x = mu^{m-1}u'_x$$

para m entero positivo.

Ahora, demostremos que esta fórmula se verifica para cualquier exponente. Supongamos que en la igualdad

$$y = u^m \tag{1}$$

u es una función de x, y m tiene cualquier valor constante. Logaritmando esta igualdad tomado como base e, obtendremos

$$\ln y = m \ln u. \tag{2}$$

Como hemos señalado, u depende de x. Por consiguiente, al variar x varía u; pero al variar u en la igualdad (1), varía y; de esta manera, las variaciones de x hacen variar a y; por lo tanto, y es función de x. De aquí se evidencia que $\ln y$ es una función compuesta. Diferenciemos respecto a x ambos miembros de la igualdad (2), aplicando la regla (XIV); se obtendrá

$$\frac{y'_x}{y} = m \cdot \frac{u'_x}{u};$$

de aquí

$$y'_x = my \cdot \frac{u'_x}{u} = m \cdot u^m \cdot \frac{u'_x}{u} = mu^{m-1}u'_x.$$

Así, pues, $(u^m)'_x = mu^{m-1}u'_x$ para un m constante cualquiera.

§ 81. Derivadas de las funciones exponenciales. Se da la función

$$y = a^u, \tag{1}$$

donde u es función de x, y a, una constante. Logaritmada la igualdad (1) para la base e, obtendremos

$$\ln y = u \ln a. \tag{2}$$

Razonando del mismo modo que en el párrafo anterior, arribaremos a la conclusión de que $\ln y$ es una función compuesta

respecto a x. Diferenciemos la igualdad (2) respecto a x ($\ln y$, según la regla (XIV); $u \ln a$, según la (V)); se tiene

$$\frac{y'_x}{y} = u'_x \ln a,$$

de donde

$$y'_x = yu'_x \ln a = a^u u'_x \ln a.$$

Así, pues,

$$(a^u)'_x = a^u u'_x \ln a, \qquad \text{(XVI)}$$

o sea, *la derivada de la función exponencial* $y = a^u$, *donde* $u = f(x)$, *es igual al producto de tres factores, el primero de los cuales es la propia función; el segundo, la derivada del exponente, y el tercero, el logaritmo natural de la base.*

Cuando $u = x$, la fórmula (XVI) se transcribirá de la siguiente forma.

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad \text{(XVI*)}$$

Si se da la función exponencial

$$y = e^u,$$

donde u es función de x, y e, la base de los logaritmos naturales, su derivada se hallará por la fórmula (XVI):

$$(e^u)'_x = e^u u'_x \ln e = e^u u'_x \cdot 1 = e^u u'_x.$$

Por lo tanto,

$$(e^u)'_x = e^u u'_x, \qquad \text{(XVII)}$$

es decir, *la derivada de la función exponencial* $y = e^u$, *donde* $u = f(x)$, *es igual al producto de la propia función por la derivada del exponente.*

Cuando $u = x$, se tiene

$$(e^x)'_x = e^x. \qquad \text{(XVII*)}$$

EJEMPLO 1. Diferenciar la función

$$y = e^{\operatorname{sen} x}.$$

SOLUCIÓN. Por la regla (XVII), hallamos

$$y'_x = e^{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x)' = e^{\operatorname{sen} x} \cos x.$$

EJEMPLO 2. Diferenciar la función

$$y = e^{\operatorname{tg} 2x}.$$

SOLUCIÓN. Por la regla (XVII), escribiremos

$$y'_x = e^{\operatorname{tg} 2x}(\operatorname{tg} 2x)'.$$

Según las reglas (XII) y (V) se tiene

$$(\operatorname{tg} 2x)' = \frac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x}.$$

Por consiguiente,

$$(e^{\operatorname{tg} 2x})'_x = e^{\operatorname{tg} 2x}(\operatorname{tg} 2x)' = e^{\operatorname{tg} 2x}\frac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \frac{2e^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x}.$$

Ejercicios

Hallar las derivadas de las funciones:

1. $y = xe^x - e^x$. 2. $S = e^t \ln t$. 3. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$. 4. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. 5. $P = e^{2h}$. 6. $f(x) = a^{-x}$. 7. $f(x) = a^{\operatorname{sen} x}$. 8. $y = xe^{2x}$. 9. $\theta = e^{-\varphi^2}$. 10. $f(\rho) = a^{\frac{1}{\rho}}$. 11. $y = x^2e^{-2x}$. 12. $f(x) = x^n n^x$. 13. $S = \ln e^t$. 14. $S = e^{\ln t}$. 15. $f(t) = \operatorname{sen} e^t$. 16. $f(t) = e^{2\operatorname{sen} t}$. 17. $y = \cos e^{-t}$. 18. $y = e^{x \ln x}$. 19. $f(\omega) = \ln \dfrac{e^\omega}{1 + e^\omega}$.

20. $\theta = \operatorname{sen}^2 e^t$. 21. $r = \sqrt{\cos e^\omega}$. 22. $y = \sqrt{\cos e^x}$. 23. $f(t) = \ln e^{\cos t}$. 24. $f(x) = \cos e^{\sqrt{x}}$. 25. $v = \operatorname{tg} e^{-2\varphi}$. 26. $R = e^{\ln^2 x}$. 27. $f(x) = e^{\frac{x}{a}} \cos \dfrac{x}{a}$. 28. $y = e^{\cos x} \operatorname{sen} x$. 29. $f(x) = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

30. $\theta = e^{2\varphi} \cos 2\varphi$. 31. $f(x) = e^{ax}(\operatorname{sen} ax - \cos ax)$. 32. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

33. $y = \ln \dfrac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

34. Escribir la ecuación de la tangente trazada a la curva $y = e^{\frac{1}{2}x}$ en el punto de su intersección con el eje Oy.

35. La dependencia entre la cantidad x de sustancia obtenida en cierta reacción química y el tiempo t de reacción se expresa por la ecuación $x = A(1 - e^{-kt})$. Determinar la velocidad de reacción.

§ 82. Derivadas de las funciones ciclométricas.

I. Se da

$$y = \operatorname{arc\,sen} u, \text{ donde } u = f(x). \tag{1}$$

De la definición del arco seno, se deduce

$$\operatorname{sen} y = u; \tag{2}$$

sen y es una función compuesta ya que, de acuerdo con las igualdades (1) y depende de u y u depende de x; por lo tanto, y es función de x. Diferenciemos respecto a x ambos miembros de las igualdades (2):

$$(\operatorname{sen} y)'_u = u'_x.$$

Por la fórmula (X), hallamos

$$\cos y \cdot y'_x = u'_x,$$

de donde

$$y'_x = \frac{u'_x}{\cos y}.$$

Pero, como se sabe,

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}\ ^*). \tag{3}$$

Tomadas en cuenta las igualdades (3) y (2), obtenemos

$$y'_x = \frac{u'_x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{u'_x}{\sqrt{1 - u^2}},$$

o

$$(\operatorname{arc\,sen} u)'_x = \frac{u'_x}{\sqrt{1 - u^2}}. \tag{XVIII}$$

Cuando $u = x$, la igualdad (XVIII) tomará la forma

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{XVIII*}$$

II. Se da

$$y = \operatorname{arc\,cos} u, \text{ donde } u = f(x).$$

---

*) Aquí, el radical se toma con el signo más, por cuanto los valores de arc sen x están comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, y en este intervalo cos$y$ tiene valores positivos.

Como

$$\operatorname{arc\,cos} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} u,$$

entonces

$$(\operatorname{arc\,cos} u)' = 0 - (\operatorname{arc\,sen} u)',$$

o

$$(\operatorname{arc\,cos} u)'_x = -\frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}. \qquad \text{(XIX)}$$

Cuando $u = x$ se tiene

$$(\operatorname{arc\,cos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \text{(XIX*)}$$

III. Se da

$$y = \operatorname{arc\,tg} u, \text{ donde } u = f(x).$$

De la definición de arco tangente se deduce

$$\operatorname{tg} y = u. \qquad (4)$$

Diferenciemos respecto a x la igualdad (4), aplicando la fórmula (XII):

$$\frac{y'_x}{\cos^2 y} = u'_x,$$

de aquí

$$y'_x = \cos^2 y \cdot u'_x.$$

Pero

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y},$$

por lo tanto,

$$y'_x = \frac{u'_x}{1+\operatorname{tg}^2 y},$$

o, conforme a la igualdad (4),

$$y'_x = \frac{u'_x}{1+u^2}.$$

Por consiguiente,

$$(\operatorname{arc\,tg} u)'_x = \frac{u'_x}{1+u^2}. \qquad \text{(XX)}$$

Cuando $u = x$, tenemos

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XX*)}$$

IV. Se da

$$y = \operatorname{arc\,ctg} u, \text{ donde } u = f(x).$$

Como

$$\operatorname{arc\,ctg} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} u,$$

entonces,

$$(\operatorname{arc\,ctg} u)' = 0 - (\operatorname{arc\,tg} u)',$$

o

$$(\operatorname{arc\,ctg} u)'_x = -\frac{u'_x}{1+u^2}. \qquad \text{(XXI)}$$

Cuando $u = x$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XXI*)}$$

EJEMPLO. Diferenciar la función

$$y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{2x}.$$

SOLUCIÓN. Por la fórmula (XVIII) hallamos

$$y'_x = \frac{(\sqrt{2x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}}.$$

Pero, de acuerdo con las fórmulas (VIII) y (V)

$$(\sqrt{2x})' = \frac{(2x)'}{2\sqrt{2x}} = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Por lo tanto,

$$y'_x = \frac{(\sqrt{2x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{(2x)'}{2\sqrt{2x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4x^2}}.$$

Ejercicios

Hallar las derivadas de las funciones:

1. $y = \operatorname{arc\,sen} 2x$. 2. $y = \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{2}$. 3. $y = \operatorname{arc\,tg} 3x$. 4. $f(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} t$. 5. $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}$ 6. $u = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{v}$. 7. $S = \operatorname{arc\,sen} t^2$. 8. $\varphi = (\operatorname{arc\,sen} x)^2$. 9. $f(x) = (\operatorname{arc\,cos} 3x)^2$. 10. $\theta = \operatorname{arc\,tg} e^{\varphi}$. 11. $S = \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{t}$. 12. $y = \operatorname{arc\,cos} \frac{2}{x}$. 13. $y = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{1}{x}}$. 14. $y = e^{\operatorname{arc\,tg} 2x}$. 15. $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{e^x}$. 16. $y = \ln e^{\operatorname{arc\,sen} x}$ 17. $y = \operatorname{arc\,cos} (1 - x)$. 18. $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - x^2}$. 19. $s = \ln \cos e^{\operatorname{arc\,cos} t}$. 20. $y = \ln \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}$. 21. $f(x) = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2}$. Hallar $f'\left(\frac{1}{2}\right)$. 22. $f(t) = a \operatorname{arc\,sen} \frac{t}{a} + \sqrt{a^2 - t^2}$. 23. $f(t) = t \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + t^2)$. 24. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x$. 25. $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$. 26. $y = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ 27. $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$. 28. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a + x}{1 - ax}$. 29. $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\varphi}{1 - \varphi^2}$. 30. $y = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln (x^2 + 1)$.

§ 83. Derivada de la función implícita. Sea una función implícita y que viene dada por la ecuación

$$xy - x - 1 = 0. \tag{1}$$

Hallemos la derivada y', suponiendo que exista. Para ello, diferenciamos ambos miembros de la igualdad (1) por la regla para la derivada de la suma algebraica.

Obtendremos:

$$(xy)' - (x)' - (1)' = 0. \tag{2}$$

Como xy es un producto de variables,

$$(xy)' = x(y)' + y(x)'.$$

De este modo, la igualdad (2) tomára la forma

$$x(y)' + y(x)' - (x)' - (1), = 0$$

ó

$$xy' + y - 1 = 0.$$

Despejando esta última ecuación con relación a y', hallaremos

$$y' = \frac{1 - y}{x}. \tag{3}$$

La función dada se podía haber diferenciado expresando primero y mediante x y, ya después, calculando la derivada de la función explícita. En efecto, de la ecuación (1) tenemos

$$y = \frac{x + 1}{x} = 1 + \frac{1}{x},$$

de donde

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Este resultado se distingue del anterior por su forma exterior, pero si en la igualdad (3) sustituimos el valor de y, obtendremos:

$$y' = \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

De esta manera, en ambos casos la diferenciación ha arrojado resultados iguales. Sin embargo, el paso de la función implícita a la explícita es factible sólo en los casos elementales. Hay funciones implícitas muy difícil y hasta imposible de ser transformadas en explícitas. Por ejemplo, la función y dada por la ecuación $xy + x = \text{sen } y$ no puede expresarse de forma explícita. Por este motivo, tales funciones deben diferenciarse como implícitas.

Analicemos otro ejemplo. Se requiere hallar la derivada de la función implícita y dada por la ecuación

$$y^2 - 8x = 0. \tag{4}$$

Utilizando la regla de diferenciación de la suma algebraica, se tiene:

$$(y^2)' - (8x)' = 0.$$

Pero y^2 es una función compuesta (y^2 depende de y, e y depende de x). Por la regla de diferenciación de la función potencial [(VIII), § 74] se tiene

$$(y^2)' = 2yy'.$$

Por consiguiente, la igualdad (4) tomará la forma

$$2yy' - (8x)' = 0,$$

o

$$2yy' - 8 = 0,$$

de donde

$$y' = \frac{8}{2y} = \frac{4}{y}.$$

Hagamos notar que el procedimiento para diferenciar las funciones implícitas ya lo hemos utilizado al hallar las derivadas de la función exponencial y de las funciones ciclométricas (véase los §§ 81, 82).

Ejercicios

Hallar las derivadas de las funciones:

1. $2y - 3x^2 + 3 = 0$. 2. $y^2 - 4x = 0$. 3. $2y^2 - 6x + 1 = 0$.

4. $x - y + y^2 = 0$. 5. $x^2 + y^2 = r^2$. 6. $2x^2 + 3y^2 - 4ay = 0$. 7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 8. $xy = 4$. 9. $x^2 - 2xy - 6 = 0$. 10. $x^2y + xy^2 = 4$.

11. $(1 - y)^2 = ax$. 12. $\operatorname{sen} y = 1 - x$. 13. $xy = \operatorname{sen} y$. 14. $x^2 = e^y$.

15. $xy = e^{x+y}$. 16. $\operatorname{arc\,sen} y = x^2$.

§ **84. Derivada de segundo orden.** Sea la función $y = f(x)$ que tiene la derivada $y' = f'(x)$. La derivada de $f'(x)$ respecto a x, si existe, se llama *segunda derivada* o *derivada de segundo orden*.

La segunda derivada de la función $y = f(x)$ se designa así:

$$y'', \quad y''_x, \quad f''(x).$$

EJEMPLO. Hallar la segunda derivada de la función

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

SOLUCIÓN.

$$y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3},$$

$$y'' = (-2x^{-3})' = -2(-3x^{-4}) = \frac{6}{x^4}.$$

Ejercicios

Hallar las segundas derivadas de las funciones:

1. $y = 4x + 1$. 2. $y = x^3$. 3. $s = 3t^2 + 2t - 1$. 4. $Q = 2\sqrt{u}$. 5. $f(t) = \dfrac{2t-1}{t}$. 6. $y = (x^2 - 1)^2$. 7. $f(\alpha) = \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$. 8. $f(t) = e^{\operatorname{sen} t}$. 9. $s = 2\ln\dfrac{2}{2+t}$.

§ 85. Concepto mecánico de la segunda derivada. Sea un cuerpo que se desplaza en línea recta conforme a la ley

$$s = f(t).$$

En el § 63 hemos establecido que la velocidad v de movimiento de un cuerpo en el instante t se define como derivada del espacio respecto al tiempo, o sea

$$v = s'.$$

Si el movimiento del cuerpo es variado, la velocidad v cambia con el tiempo y en el intervalo Δt recibe el incremento Δv. En este caso, la magnitud del cociente $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ que muestra la variación de la velocidad por unidad de tiempo recibe el nombre de *aceleración media* en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$.

Supongamos que $\Delta t \to 0$, entonces $t + \Delta t \to t$, y la aceleración media $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ tiende a la magnitud llamada *aceleración en el instante dado de tiempo t*. Designemos esta aceleración con j:

$$j = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = (s')' = s''.$$

De este modo, *la aceleración del movimiento rectilíneo de un cuerpo en el instante dado es igual a la segunda derivada del espacio respecto al tiempo, calculada para el instante dado.*

EJEMPLO. Un cuerpo se mueve en línea recta conforme a la ley $s = 2t^2 - 3t + 5$. Hallar su velocidad y aceleración en el instante $t = 5$.

SOLUCIÓN. Para determinar la velocidad hay que hallar la primera derivada de la función dada en $t = 5$. Así, pues:

$$v = s' = (2t^2 - 3t + 5)' = 4t - 3$$

y

$$v_{t=5} = 4 \cdot 5 - 3 = 17.$$

La aceleración j es igual a la segunda derivada de la función para $t = 5$, es decir,

$$j = s'' = (s')' = (4t - 3)' = 4.$$

La magnitud de la aceleración ha resultado constante para cualquier valor de t; por lo tanto, conforme a esta ley, el cuerpo se mueve con aceleración constante.

Ejercicios

Determinar la aceleracion de un punto en los instantes de tiempo t indicados, si su velocidad moviéndose en línea recta viene dada por las siguientes ecuaciones:

1. $v = t^2 + 2t$, $t = 3$. 2. $v = 3t - t^3$, $t = 2$. 3. $v = 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}$, $t = \frac{\pi}{3}$. 4. $v = 2 \cos 3t$, $t = \frac{\pi}{6}$.

Hallar, en los instantes de tiempo t indicados, la velocidad y la aceleración de un punto que se mueve en línea recta conforme a la ley dada por las siguientes ecuaciones:

5. $s = t^3 + 2t^2$, $t = 2$. 6. $s = 2t - t^2$, $t = 1$. 7. $s = 2 \operatorname{sen} t$, $t = \frac{\pi}{4}$. 8. $s = 3 \cos \frac{\pi t}{3}$, $t = 1$.

9. El camino recorrido por la jaula de una máquina elevadora se halla de la ecuación $h = 4 + 5t$. Determinar la velocidad y la aceleración para cualquier instante de tiempo.

10. Determinar el instante t en que la aceleración de un movimiento rectilíneo que se rige por la ley $s = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$ es nula. ¿Cuál es la velocidad en este caso?

11. Un cuerpo se mueve por una recta según la ley

$$s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t.$$

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento del cuerpo en función del tiempo t. ¿En qué instantes el cuerpo cambia el sentido del movimiento?

12 Un volante rotatorio, retenido por un freno, durante t segundos gira en un ángulo

$$\varphi = a + bt - ct^2,$$

donde a, b y c son constantes positivas. Hallar:

1) la velocidad angular y la aceleración del giro y
2) el instante de parada del volante.

13. La altura s (en metros) que alcanza en t segundos un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba a la velocidad v_0 m/s se define por la ecuación

$$s = v_0 t - 4{,}9t^2.$$

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento en los instantes $t = 3$ s y $t = 10$ s, si $v_0 = 200$ m/s.
(La resistencia del aire no se toma en consideración.)

14. Un cuerpo ha sido lanzado verticalmente hacia arriba desde 10 m de altura a la velocidad inicial de 40 m/s. Determinar:

1) a qué altura de la superficie de la tierra se encontrará al cabo de 1 segundo,
2) la velocidad y aceleración del movimiento en el instante $t = 1$ s y
3) al cabo de cuántos segundos alcanzará el punto más alto y a qué distancia de la superficie de la tierra.

15. Un cuerpo se mueve en línea recta por la ley

$$s = ae^t + be^{-t},$$

donde a y b son constantes. Mostrar que su aceleración es siempre igual al camino recorrido.

16. Un cuerpo se desplaza en línea recta según la ley $s = ae^{-kt}$ Determinar la velocidad y aceleración en el instante $t = 0$.

17. Una bala, al penetrar en un cuerpo sólido, se mueve en él conforme a la ley

$$s = \frac{1}{k} \ln (1 + kv_0 t),$$

donde v_0 es la velocidad a que la bala entra en el cuerpo y k, una constante positiva. Hallar la aceleración del movimiento de la bala.

18. Hallar la fuerza F que actúa sobre un punto material de masa m, que se desplaza en línea recta según la ley expresada por una de las siguientes ecuaciones:

1) $s = 2t^3 - t^2$ si $t = 2$,

2) $s = \operatorname{sen} 2t$ si $t = \dfrac{\pi}{8}$ y

3) $s = e^{2t}$ si $t = 0$.

Nota. La fuerza F que actúa sobre un punto material de masa m es igual al producto de la masa por la aceleración del movimiento, o sea, $F = mj$.

19. Hallar la fuerza bajo cuya acción un punto material de masa m realiza un movimiento oscilatorio conforme a la ley

$$s = A(\operatorname{sen} \omega t + \omega_0).$$

20. Un punto de masa m se mueve por la ley

$$s = at^2 + bt + c,$$

donde a, b y c son constantes. Demostrar que la fuerza que actúa sobre el punto es constante.

21. Un cuerpo de masa m se mueve de forma oscilatoria respecto a la posición de equilibrio O, de acuerdo con la ley

$$x = a \operatorname{sen} 2\pi\nu t,$$

donde x es la distancia al punto O, y a y ν, constantes. Mostrar que la fuerza actuante es igual a la distancia del punto a O.

22. Un punto se desplaza de modo que su velocidad

$$v = a \ln \frac{b}{t},$$

donde a y b son constantes. Hallar la aceleración del movimiento en función de la velocidad.

23. Un punto se mueve en línea recta por la ley $s = \sqrt{t}$. Mostrar que:
1) el movimiento es retardo y
2) la aceleración es proporcional al cubo de la velocidad.

TABLA DE LAS FÓRMULAS DE DIFERENCIACIÓN

	Si u, v, y w son funciones de x	Si $u = x$
I		$(c)' = 0$
II		$(x)' = 1$
III	$(u + v - w)' = u' + v' - w'$	
IV	$(uv)' = uv' + vu'$	
V	$(cu)' = cu'$	
VI	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$	
VII	$(u^m)'_x = mu^{m-1}u'_x$	$(x^m)' = mx^{m-1}$
VIII	$(\sqrt{u})'_x = \frac{u'_x}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
IX	$\left(\frac{1}{u}\right)'_x = -\frac{u'_x}{u^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
X	$(\text{sen } u)'_x = \cos u \cdot u'_x$	$(\text{sen } x)' = \cos x$
XI	$(\cos u)'_x = -\text{sen } u \cdot u'_x$	$(\cos x)' = -\text{sen } x$
XII	$(\text{tg } u)'_x = \frac{u'_x}{\cos^2 u}$	$(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
XIII	$(\text{ctg } u)'_x = -\frac{u'_x}{\text{sen}^2 u}$	$(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$
XIV	$(\ln u)'_x = \frac{u'_x}{u}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
XV	$(\log u)'_x = \frac{u'_x}{u} \cdot 0{,}4343$	$(\log x)' = \frac{0{,}4343}{x}$

Continuación

	Si u, v, y w son funciones de x	Si $u = x$
XVI	$(a^u)'_x = a^u \ln a \cdot u'_x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
XVII	$(e^u)'_x = e^u \cdot u'_x$	$(e^x)' = e^x$
XVIII	$(\text{arc sen } u)'_x = \dfrac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\text{arc sen } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
XIX	$(\text{arc cos } u)'_x = -\dfrac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\text{arc cos } x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
XX	$(\text{arc tg } u)'_x = \dfrac{u'_x}{1+u^2}$	$(\text{arc tg } x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
XXI	$(\text{arc ctg } u)' = -\dfrac{u'_x}{1+u^2}$	$(\text{arc ctg } x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Capítulo IX
Análisis de las funciones por sus derivadas

§ 86. Crecimiento y decrecimiento de la función. Sea dada la función $y = f(x)$ cuya representación gráfica se ofrece en la fig. 94. Sigamos el curso de la variación de las ordenadas de los puntos de nuestra curva cuando crecen sus abscisas.

Vemos que, al crecer el argumento x, las ordenadas de los puntos correspondientes crecen en el sector MA de la curva y decrecen en el AK. Si el argumento sigue creciendo, las ordenadas, tomando valores negativos, continúan decreciendo en todos los puntos del arco KB; mientras que las del arco BC crecen, etc. Esta función se denomina *creciente* para los sectores MA, BC y DL, y *decreciente*, para los sectores AB y CD.

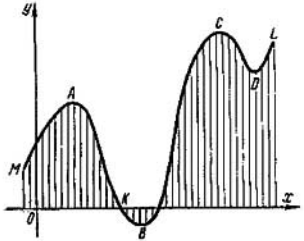


FIG. 94

DEFINICIÓN. *La función $y = f(x)$ se llama creciente en el intervalo dado de valores de x si al aumentar el argumento x en este intervalo, crecen los valores correspondientes de y, y decreciente si al aumentar x disminuyen los valores de y.*

En el presente capítulo, examinaremos las variaciones de las funciones sólo para los casos de crecimiento del argumento. Consideraremos también que tanto **la función como su primera y segunda derivadas son continuas** en todos los valores examinados de x.

§ 87. Caracteres de crecimiento y decrecimiento de la función.

TEOREMA. *Si la derivada de la función $y=f(x)$ es positiva en el intervalo dado de valores de x, la función crece en este intervalo, y si es negativa, decrece.*

Aclaremos el concepto geométrico de este teorema sin demostrarlo.

I. Sea

$$f'(x) > 0 \tag{1}$$

en el intervalo dado de valores de x.

En el § 66 hallamos que

$$f'(x) = k = \operatorname{tg}\alpha, \tag{2}$$

donde k es el coeficiente angular de la tangente trazada a la curva que representa la función $y=f(x)$, y α, el ángulo que esta tangente forma con el sentido positivo del eje Ox. De la igualdad (2) se deduce que

$$\text{si } f'(x) > 0, \text{ entonces también } \operatorname{tg}\alpha > 0,$$

y, por lo tanto, α es un ángulo agudo.

De esta manera, cuando se verifica la condición (1), las tangentes trazadas al gráfico de la función $y=f(x)$ forman **ángulos agudos** con el sentido positivo del eje Ox en el intervalo dado de valores de x (figs. 95a y 95b); esto indica que el gráfico está dirigido hacia arriba, es decir, la función **crece**.

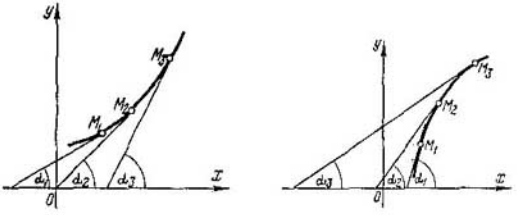


FIG. 95

II. Supongamos que en el intervalo dado de valores de x

$$f'(x) < 0. \tag{3}$$

En este caso, como evidencia la igualdad (2), también $\operatorname{tg}\alpha < 0$ y, por lo tanto, α es un ángulo obtuso.

Así, pues, cuando se verifica la igualdad (3), las tangentes trazadas al gráfico de la función $y = f(x)$ forman **ángulos obtusos** con el sentido positivo del eje Ox en el intervalo

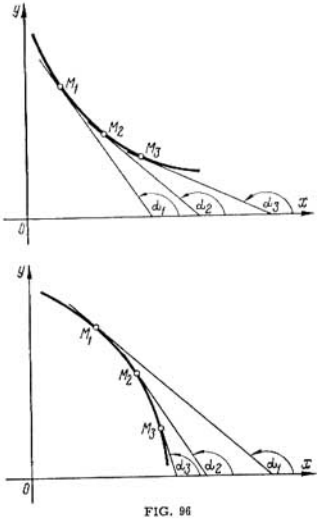


FIG. 96

dado de valores de x (figs. 96a y 96b). Esto indica que el gráfico está dirigido hacia abajo, o sea, la función **decrece**.

EJEMPLO. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = x^2$.

SOLUCIÓN. Hallemos la derivada de la función dada

$$y' = (x^2)' = 2x.$$

La magnitud $2x$ tiene valor positivo para todo x positivo, y negativo, para todo x negativo. De aquí se deduce que esta función es decreciente cuando $x < 0$, y creciente, cuando $x < 0$ (fig. 97).

§ 88. Máximo y mínimo de la función. Al examinar el curso de la variación de la función en la fig. 94, de la pág. 224, podemos observar que, en los sectores MA y BC, las ordenadas de los puntos crecen, alcanzando su máxima magnitud en los puntos A y C de la curva, en comparación con los valores de las ordenadas de los puntos vecinos, y decrecen en los sectores AB y CD hasta llegar a la magnitud mínima en los puntos B y D, en comparación con las ordenadas de los puntos vecinos.

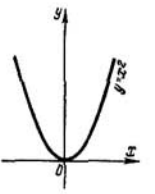


FIG. 97

Los valores del argumento en que la función alcanza sus valores máximos o mínimos se denominan *puntos de máximo* o *puntos de mínimo* de la función, respectivamente, y el valor de la función en estos valores del argumento, *máximo* o *mínimo* de la misma.

Como se ve, el punto de máximo sirve de frontera de paso del crecimiento al decrecimiento de la función, y el punto de mínimo, de frontera de transición del decrecimiento al crecimiento.

DEFINICIÓN 1. *La función $y = f(x)$ tiene un máximo en $x = a$ si para todo x en un entorno de a se verifica la inecuación*

$$f(a) > f(x).$$

DEFINICIÓN 2. *La función $y = f(x)$ tiene un mínimo en $x = a$ si para todo x en un entorno de a se verifica la inecuación*

$$f(a) < f(x).$$

§ 89. Caracteres del máximo y del mínimo de la función. I. Supongamos que al punto A del gráfico de la función $y = f(x)$ *le corresponde un máximo para* $x = a$ (fig. 98).

Como evidencia la figura, en todos los puntos situados a la izquierda de A las tangentes forman ángulos agudos con el sentido positivo del eje Ox. Por lo tanto, la tangente de estos ángulos tiene valor positivo.

Pero

$$f'(x) = tg\alpha \ (\S\ 66), \qquad (a)$$

donde α es el ángulo que la tangente forma con la dirección positiva del eje Ox; por consiguiente, de acuerdo con la igualdad (a) también la derivada $f'(x)$ es positiva en esos puntos.

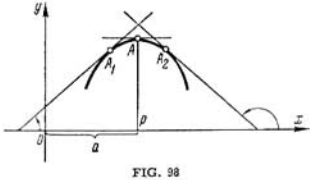


FIG. 98

En cambio, en los puntos situados a la derecha de A las tangentes forman ángulos obtusos con el sentido positivo del eje Ox y, por lo tanto, la tangente de estos ángulos tiene valor negativo, y conforme a esa misma igualdad (a) la derivada $f'(x)$ es también negativa.

Por cuanto la derivada de la función es continua, su valor debe variar sin saltos y, en consecuencia, al tener lugar la transición de los valores positivos a los negativos pasará por cero cuando $x = a$ (§ 58), o sea, en el punto A

$$f'(a) = 0.$$

Así pues, si *la función* $y = f(x)$ *tiene un máximo en* $x = a$, *entonces*,

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f'(a) = 0\ y \\ 2)\ f'(x)\ \textit{cambia el signo de}\ +a- \\ \textit{al pasar el argumento por}\ x = a. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

II. Supongamos que al punto B del gráfico de la función $y = f(x)$ le corresponde un mínimo para $x = a$ (fig. 99). Razonando de la misma forma llegaremos a la conclusión de que, en este caso, al crecer x la primera derivada cambia los valores negativos por positivos y, al ser continua, se anula cuando $x = a$, o sea, en el punto B

$$f'(a) = 0.$$

Por lo tanto, se verifica lo siguiente:
si la función $y = f(x)$ *tiene un mínimo en* $x = a$, entonces,

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f'(a) = 0\ y \\ 2)\ f'(x)\ \textit{cambia el signo de}\ -\ a\ +\ \\ \quad \textit{al pasar el argumento por}\ x = a. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Se verifican las afirmaciones inversas:

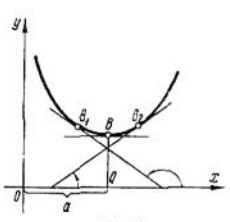


FIG. 99

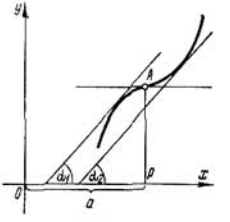


FIG. 100

La función $y = f(x)$ *presenta un máximo en* $x = a$ *si su derivada tiene las propiedades* (1).

La función $y = f(x)$ *presenta un mínimo en* $x = a$ *si su derivada tiene las propiedades* (2).

Las propiedades (1) y (2) son los caracteres *suficientes.* y *necesarios* del máximo y del mínimo de la función, es decir, los caracteres cuya verificación dimana de la existencia del máximo o del mínimo de la función, y, al contrario, cuya existencia origina un máximo o un mínimo de la función.

La igualdad $f'(a) = 0$ evidencia que la tangente trazada en los puntos A y B de los gráficos es paralela al eje Ox.

III. Puede, sin embargo, ocurrir que la primera derivada de la función, convirtiéndose en cero cuando $x = a$, no cambie de signo al pasar el argumento por $x = a$. En este caso la función carece de máximo y mínimo. En la fig. 100 se muestra que la tangente en el punto A de la curva $y = f(x)$ es paralela al eje Ox, o sea, $f'(a) = 0$; pero $\operatorname{tg} \alpha_1 > 0$ y $\operatorname{tg} \alpha_2 > 0$.

Por lo tanto, la primera derivada de la función $y = f(x)$ no cambia de signo al pasar el argumento por $x = a$. Como evidencia la fig. 100, la función $y = f(x)$ no presenta ni máximo ni mínimo cuando $x = a$.

Así, pues, la conversión de la primera derivada en cero es únicamente la condición necesaria (¡pero no suficiente!) del máximo o del mínimo.

Los valores del argumento que convierten la primera derivada en cero se llaman *valores críticos del argumento*.

§ 90. Primera regla de determinación del máximo y del mínimo de la función. Sobre la base de lo expuesto en el § 89, se puede enunciar la siguiente regla de determinación del máximo y del mínimo de la función $y = f(x)$.

I. *Hallar la derivada* $f'(x)$.

II. *Igualándola a cero, hallar las raíces reales* de la ecuación obtenida; sean estas raíces (valores críticos del argumento)* x_1, x_2, x_3, *etc.*

III. *Disponiendo los valores de* x_1, x_2, x_3, ... *en orden de crecimiento de sus magnitudes, sustituir en la derivada un número cualquiera menor que* x_1, *y luego, sustituir un número cualquiera mayor que* x_1 *pero menor que* x_2; *si en este caso, el signo de la derivada resulta:*

1) *primero* $+$ *y luego* $-$, *la función alcanza un máximo en* $x = x_1$,

2) *primero* $-$ *y luego* $+$, *la función alcanza un mínimo en* $x = x_1$, *y*

3) *en ambos casos igual, la función no presenta máximo ni mínimo en* $x = x_1$.

De este mismo modo, determinar el signo de $f'(x)$ *para* $x < x_2$ *y para* $x > x_2$; *pero para* $x < x_2$ *el signo de* $f'(x)$ *ya está determinado; queda por hallar su signo en el intervalo de valores de* x *comprendidos entre* x_2 *y* x_3 *y, por la alternación de los signos de* $f'(x)$, *establecer si la función presentará o no máximo o mínimo en* $x = x_2$, *y así sucesivamente***.

*) Si las raíces son imaginarias, la función no presenta máximo ni mínimo.

**) Para determinar el signo de la derivada en $x < x_1$, sustituimos en ella x por un número cualquiera menor que x_1, por cuanto en estos valores de x la derivada no se convierte en cero y, por lo tanto, su signo es constante para $x < x_1$. Por esta misma causa, la derivada tiene el signo constante en todo intervalo de valores de x entre x_1 y x_2, entre x_2 y x_3, etc.; por ello, para determinar su signo en cada uno de estos intervalos, sustituimos en la derivada x por un número cualquiera del correspondiente intervalo (§ 58).

IV. *Hallar los valores máximos y mínimos de la función, es decir, calcular* $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, *etc.*

El cuarto punto de esta regla es necesario sólo cuando se requiere hallar la posición que los puntos correspondientes al máximo y al mínimo de la función tienen en la curva.

Examinemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Analizar la función $y = x^2 - 1$ en cuanto al máximo y al mínimo.

SOLUCIÓN. I. Hallamos la derivada de la función:

$$y' = (x^2 - 1)' = 2x.$$

II. La igualamos a cero:

$$2x = 0,$$

de donde

$$x = 0.$$

III. Determinamos el signo de la derivada para un valor de $x < 0$; por ejemplo, para $x = -1$:

$$y'_{x=-1} = 2(-1) = -2.$$

Ahora, hallamos el valor de la derivada para $x > 0$; por ejemplo, para $x = 1$:

$$y'_{x=1} = 2 \cdot 1 = 2.$$

El cambio del signo de la derivada de menos a más evidencia que esta función presenta el mínimo en $x = 0$.

IV. Hallamos el valor mínimo de la función, o sea $f(0)$:

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1.$$

Ahora, podemos representar en la figura la posición del punto hallado $A(0; -1)$ y la forma de la curva cerca del mismo (fig. 101).

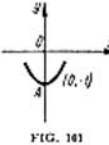


FIG. 101

EJEMPLO 2. Analizar, en cuanto al máximo y el mínimo, la función

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6.$$

SOLUCIÓN. De acuerdo con la regla, tenemos:

$$\text{I. } y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6\right)' = x^2 - 3x - 4.$$

II. $x^2 - 3x - 4 = 0$,
de donde

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

III. 1) Examinamos el valor crítico $x_1 = -1$.
Tomamos un valor de $x < -1$; por ejemplo, $x = -2$: entonces:

$$y'_{x=-2} = (-2)^2 - 3(-2) - 4 = 4 + 6 - 4 = 6.$$

Tomamos un valor de $x > -1$; por ejemplo, $x = 0$; entonces:

$$y'_{x=0} = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4.$$

El cambio del signo de la derivada de más a menos evidencia que la función presenta el máximo en $x = -1$.

2) Examinamos el valor crítico $x_2 = 4$. Tomamos para $x < 4$ el valor $x = 0$, y para $x > 4$, el valor $x = 5$, tenemos:

$$y'_{x=0} = -4, \quad y'_{x=5} = 25 - 15 - 4 = 6.$$

Por consiguiente, la función presenta el mínimo cuando $x = 4$.

IV. Los valores máximos y mínimos de la función serán:

$$y_{x=-1} = \frac{1}{3}(1-)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 - 4(-1) + 6 = 8\frac{1}{6},$$

$$y_{x=4} = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 6 = -12\frac{2}{3}.$$

Anotemos en una tabla los resultados del cálculo:

Valor crítico del argumento	Signo de la derivada		Comportamiento del argumento	Valores de la función para el valor crítico del argumento
	antes del valor crítico del argumento	después del valor crítico del argumento		
-1	$+$	$-$	máx.	$8\frac{1}{6}$
4	$-$	$+$	mín.	$-12\frac{2}{3}$

Designando con A y B los puntos del gráfico de la función correspondientes al máximo y al mínimo, escribiremos:

$$A\left(-1;\ 8\frac{1}{6}\right) \text{ y } B\left(4;\ -12\frac{2}{3}\right).$$

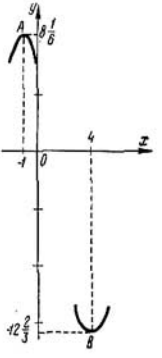


FIG. 102

En la fig. 102 están representadas la posición de los puntos A y B y la forma de la curva en la proximidad de los mismos.

EJEMPLO 3. Analizar, en cuanto al máximo y al mínimo, la función $y = x^3$.

SOLUCIÓN. I. $y' = (x^3)' = 3x^2$.

II. $3x^2 = 0$, de donde $x_{1,2} = 0$.

III. Para $x < 0$; por ejemplo, para $x = -1$,

$$y'_{x=-1} = 3(-1)^2 = 3;$$

para $x > 0$; por ejemplo, para $x = 1$,

$$y'_{x=1} = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Los signos de la derivada han resultado iguales al pasar por el valor crítico $x = 0$; por lo tanto, la función dada no presenta máximo ni mínimo en $x=0$ (véase la fig. 77, pág. 157).

Ejercicios

1. Dada la función $y = 2x^2$. Determinar si crecerá o decrecerá en los valores del argumento: 1) $x = 1$ y 2) $x = -1$. Comprobar el resultado gráficamente.

2. Lo mismo para la función $y = -x^2 + x - 1$ en los valores del argumento: 1) $x = -2$, 2) $x = 0$ y 3) $x = 2$. Comprobar el resultado gráficamente.

3. Hallar los valores del argumento en que crecen o decrecen las funciones: 1) $y = 5x + 1$ y 2) $y = 4 - 3x$. Comprobar el resultado gráficamente.

4. Un cuerpo ha sido lanzado verticalmente hacia arriba a la velocidad inicial de $v_0 = 300$ m/s. La ecuación del movimiento del cuerpo es $s = v_0 t - 4{,}9t^2$. ¿Ascenderá o descenderá el cuerpo en los instantes:

1) $t = 20$ s, 2) $t = 30$ s y 3) $t = 32$ s?

Ofrecer las soluciones gráfica y analítica.

5. Hallar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de las funciones:

1) $y = x^2 - 3x + 1$ y 2) $y = -2x^2 + 8x - 1$.

Hallar el máximo y el mínimo de las funciones:

6. $y = x^2 - 2x$. **7.** $y = -x^2 + 4x$. **8.** $y = 2x^2 + 3x + 4$. **9.** $y = -5x^2 - 2x + 2$. **10.** $v = 6t - t^2 - 7$. **11.** $y = x^4$. **12.** $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x$. **13.** $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5$ **14.** $y = \frac{1}{3}x^3 - x$. **15.** $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 6t - 7$. **16.** $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. **17.** $y = x^3 + x^2 - 5x - 6$. **18.** $s = 2t^3 - t^2 - 4t + 5$. **19.** $v = p^3 - 3p^2 - 9p + 1$. **20.** $y = \frac{x}{1 + x^2}$. **21.** $y = 3x - \frac{27}{2 - x}$.

22. Mostrar que las siguientes funciones no presentan máximo ni mínimo:

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$,

2) $y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

§ 91. Convexidad y concavidad de la curva. Examinemos la curva representada en la fig. 103. Trazando una tangente, *AB*, por ejemplo, vemos que los puntos de la curva conti-

guos al punto de tangencia A y situados a ambos lados del mismo se hallan más abajo que la tangente. En este caso se dice que la curva tiene *convexidad en el punto A*; si se verifica

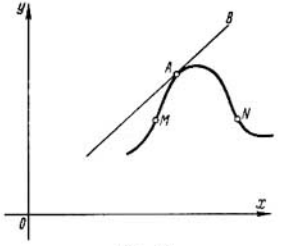


FIG. 103

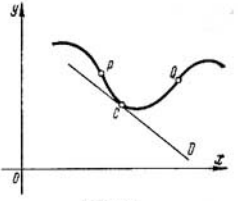


FIG. 104

esta condición para la parte de la curva comprendida entre los puntos M y N, esta parte recibe el nombre de *convexa*.

Tomemos la curva representada en la fig. 104. Aquí observamos otro fenómeno, a saber: los puntos de la curva próximos al punto de tangencia C y situados a ambos lados del mismo se hallan más arriba que la tangente CD.

En este caso se dice que la curva tiene *concavidad en el punto C*, y se llama *cóncava* la parte de la curva comprendida entre los puntos P y Q, que satisface esta condición.

Existen casos en que una parte de la curva es convexa y otra, cóncava; por ejemplo, la sinusoide (fig. 105) presen-

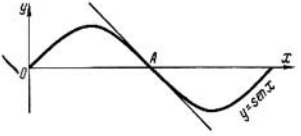


FIG. 105

ta convexidad (encima del eje Ox) y concavidad (debajo del eje Ox); además, el punto A sirve de frontera entre ellas. La tangente trazada a la curva en este punto es común para la parte convexa y la cóncava. Al mismo tiempo, esta

tangente corta la curva en el punto de tangencia; por este motivo, la sinusoide no es convexa ni cóncava en el punto A. Este punto recibe el nombre de *punto de inflexión*.

§ 92. Caracteres de convexidad y de concavidad de las curvas. TEOREMA. *Si la segunda derivada de la función $y = f(x)$ es positiva en un intervalo dado de valores de x, la curva es cóncava en este intervalo, y si es negativa, convexa.*

Expliquemos este teorema geométricamente.

I. Supongamos que en un intervalo dado de valores de x

$$f''(x) > 0. \tag{1}$$

Llamando a $f'(x)$ simplemente función, para mayor comodidad, y a $f''(x)$, su primera derivada, apliquemos a $f'(x)$ los caracteres de crecimiento y decrecimiento (§ 87); por cuanto, conforme a la condición (1) $f''(x)$ es positiva en el intervalo dado de valores de x, la función $f'(x)$ crece en este intervalo.

Sabemos (§ 66) que

$$f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha, \tag{2}$$

donde k es el coeficiente angular de la tangente trazada al gráfico de la función $y = f(x)$, y α, el ángulo que esta tangente forma con el sentido positivo del eje Ox. De la igualdad (2) se deduce que, al crecer la derivada $f'(x)$, crece también tg α y, por lo tanto, crece el ángulo α.

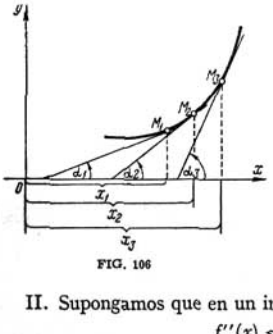


FIG. 106

Así, pues, cuando se verifica la condición (1), con el **crecimiento** de x crece también el ángulo que la tangente a la curva $y = f(x)$ forma con la dirección positiva del eje Ox; pero esto ocurre sólo cuando las tangentes están trazadas en puntos situados en la parte cóncava de la curva (fig. 106).

II. Supongamos que en un intervalo dado de valores de x

$$f''(x) < 0. \tag{3}$$

Llamando, también en este caso, función a $f'(x)$ y su primera derivada, a $f''(x)$, apliquemos de nuevo a $f'(x)$ los

caracteres de crecimiento y decrecimiento; de acuerdo con la condición (3), $f''(x)$ es negativa en el intervalo dado de valores de x y, por lot anto, la función $f'(x)$ decrece en este intervalo. Conforme a la igualdad (2), tg α decrece también y, por consiguiente, ocurrirá lo mismo con el ángulo α.

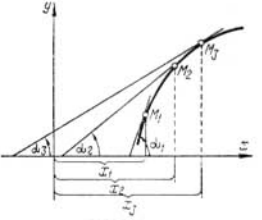


FIG. 107

De este modo, cuando se verifica la condición (3), con el **crecimiento** de x **decrece** el ángulo que la tangente a la curva $y = f(x)$ forma con el sentido positivo del eje Ox; pero esto sólo tiene lugar cuando las tangentes están trazadas en la parte convexa de la curva (fig. 107).

EJEMPLO. Determinar si la curva $y = x^3$ es convexa o cóncava en el punto cuya abscisa es igual a -2.

SOLUCIÓN. Hallamos la segunda derivada de la función dada y establecemos su signo en $x = -2$:

$$y' = (x^3)' = 3x^2,$$

$$y'' = (3x^2)' = 6x,$$

$$y''_{x=-2} = 6 \cdot (-2) = -12.$$

La segunda derivada es negativa; por lo tanto, la curva $y = x^3$ es convexa (véase la fig. 77, pág. 157) en el punto con la abscisa igual a -2.

§ 93. Determinación del punto de inflexión.

DEFINICIÓN. *El punto que separa las partes cóncava y convexa de la curva recibe el nombre de punto de inflexión.*

Si el gráfico de la función $y = f(x)$ cambia la convexidad por concavidad o al contrario, la segunda derivada de esta función debe cambiar de signo, convirtiéndose en cero en el punto de inflexión (§ 58).

Se puede mostrar que también es justa la afirmación inversa: *si en un x dado la segunda derivada de la función $y = f(x)$ es igual a cero y cambia de signo al pasar el argu-*

mento por este valor de x, el gráfico de la función tiene punto de inflexión.

Esta es la condición *suficiente* y *necesaria* del punto de inflexión. De aquí se deduce la siguiente regla.

Para hallar el punto de inflexión de la curva $y = f(x)$ *es necesario:*

I. *Hallar la segunda derivada de la función* $y = f(x)$.

II. *Igualándola a cero, despejar la ecuación obtenida; sean sus raíces reales* x_1, x_2, x_3, *etc.* *)

III. *Disponiendo los valores de* x_1, x_2, x_3,... *en orden creciente, sustituir en la segunda derivada, primero, un número cualquiera menor que* x_1 *y, luego, un número cualquiera comprendido entre* x_1 *y* x_2; *si en ambos casos se obtienen signos distintos, entonces existe punto de inflexión en* $x = x_1$, *si resultan iguales, no existe punto de inflexión; determinar de este mismo modo el signo de la segunda derivada antes y después de* x_2, *y así sucesivamente.*

IV. *Hallar las ordenadas de los puntos de inflexión, o sea, calcular la función para los valores del argumento en que tiene lugar la inflexión.*

EJEMPLO. Hallar el punto de inflexión de la curva $y = x^3$.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la regla, hallamos:

I. $y' = (x^3)' = 3x^2$, $y'' = (3x^2)' = 6x$.

II. $6x = 0$, de donde $x = 0$.

III. Determinamos el signo:

$$y''_{x=-1} = 6 \cdot (-1) = -6,$$

$$y''_{x=1} = 6 \cdot 1 = +6.$$

Como se ve, cuando $x = 0$ tiene lugar un punto de inflexión.

IV. $y = 0^3 = 0$.

La curva $y = x^3$ tiene el punto de inflexión en el origen de coordenadas y aquí pasa de convexa a cóncava, como evidencia la alternación de los signos de la segunda derivada (véase la fig. 77, pág. 157).

*) Se supone que la ecuación tiene un número limitado de raíces.

Ejercicios

1. Determinar si la curva $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ es convexa o cóncava en los puntos cuyas abscisas son: 1) $x = 1$ y 2) $x = 2$.

2. Determinar si la curva $y = x^4 - 4x^3 + 8x - 2$ es convexa o cóncava en los puntos cuyas abscisas son: 1) $x = \frac{1}{2}$ y 2) $x = -2$.

3. ¿En qué puntos son convexas o cóncavas las curvas:

1) $y = x^2 - 3x + 6$ y 2) $y = 2 - 3x - x^2$?

Hallar los puntos de inflexión de las siguientes curvas:

4. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$. **5.** $y = x^3 + 3x^2 - 5x - 6$. **6.** $y = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 9$. **7.** $y = -x^3 + 6x^2 - 15x + 10$. **8.** $y = x^4$. **9.** $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$. **10.** $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$. **11.** $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2$. **12.** $y = 12x^4 - 12x^2$. **13.** $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

Hallar los intervalos de convexidad y de concavidad de las curvas:

14. $y = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$. **15.** $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$.

§ 94. Segunda regla de determinación del máximo y del mínimo de la función.

TEOREMA. *Si para cierta función* $y = f(x)$

$$f'(a) = 0,$$

esta función presenta un máximo en $x = a$ *si* $f''(a) < 0$, *y un mínimo si* $f''(a) > 0$.

Demostremos que este teorema es justo, mediante los siguientes razonamientos.

Como $f'(a) = 0$, la curva $y = f(x)$ tiene una tangente horizontal en $x = a$. Luego, cuando $f''(a) < 0$, el punto con la abscisa $x = a$ se halla en la parte convexa del gráfico de la función, y cuando $f''(a) > 0$, en la cóncava (como la función $f''(x)$ es continua, para los puntos de la curva situados en un entorno del punto con la abscisa a se verifica la inecuación $f''(x) < 0$ ó $f''(x) > 0$ y, por lo tanto, se puede

hablar de la parte de la curva convexa o cóncava, respectivamente; véase el § 92). Por consiguiente, en el primer caso se presenta un máximo, y en el segundo, un mínimo, lo que era necesario demostrar.

No obstante, puede ocurrir que cuando $f'(a) = 0$ también $f''(a) = 0$, entonces la segunda derivada no puede aplicarse para determinar si la función tiene máximo o mínimo. En este caso, hay que recurrir a la primera regla (§ 90).

De este modo, tenemos una segunda regla para hallar el máximo y el mínimo de la función:

Hallar la segunda derivada y sustituir en ella cada uno de los valores críticos del argumento; si luego de la sustitución de uno de ellos la segunda derivada resulta negativa, entonces la función presenta un máximo en este valor del argumento; si resulta positiva, un mínimo, y si se convierte en cero, hay que recurrir a la primera regla para resolver el problema.

Examinemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Analizar, en cuanto al máximo y al mínimo, la función

$$y = x^2 - 4x + 9.$$

SOLUCIÓN. De acuerdo con la regla, tenemos:

I. $y' = (x^2 - 4x + 9)' = 2x - 4.$

II. $2x - 4 = 0$, de donde $x = 2.$

III. $y'' = (2x - 4)' = 2.$

La segunda derivada ha resultado positiva; por lo tanto presenta un mínimo en $x = 2.$

EJEMPLO 2. Analizar, en cuanto al máximo y al mínimo, la función

$$y = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 15.$$

SOLUCIÓN.

I. $y' = \left(x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 15\right)' = 3x^2 - 21x + 30.$

II. $3x^2 - 21x + 30 = 0$ ó $x^2 - 7x + 10 = 0$, de donde

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2};$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 5.$$

III. $y'' = (3x^2 - 21x + 30)' = 6x - 21.$

En la segunda derivada sustituyamos x por los valores 2 y 5 alternativamente:

$$y''_{x=2} = 6 \cdot 2 - 21 = -9,$$

$$y''_{x=5} = 6 \cdot 5 - 21 = +9.$$

Como se ve, la función presenta un máximo en $x = 2$, y un mínimo, en $x = 5$.

EJEMPLO 3. Analizar, en cuanto al máximo y al mínimo, la función

$$y = x^4.$$

SOLUCIÓN. I. $y' = (x^4)' = 4x^3$.

II. $4x^3 = 0$, de donde $x = 0$.

III. $y'' = (4x^3)' = 12x^2$.

Sustituyendo el valor $x = 0$, obtendremos:

$$y''_{x=0} = 12 \cdot 0^2 = 0.$$

La segunda derivada ha resultado igual a cero, motivo por el cual no se pueden determinar el máximo y el mínimo utilizando este método. Recurriendo a la primera regla, hallamos

$$y'_{x=-1} = 4(-1)^3 = -4,$$

$$y'_{x=1} = 4 \cdot 1^3 = +4.$$

El cambio del signo de la primera derivada indica que la función presenta un mínimo en $x = 0$.

Ejercicios

Investigar, en cuanto al máximo y al mínimo, las funciones:

1. $y = 3x^2$. **2.** $y = 4x^2 - 12$. **3.** $y = x^2 - 6x + 3$. **4.** $y = -2x^2 + 8x - 5$. **5.** $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 10$. **6.** $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$. **7.** $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$. **8.** $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 2$. **9.** $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 4$. **10.** $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$. **11.** $y = x^5$.

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

12. $y = x^3 - 12x - 4$. **13.** $y = -x^3 + x^2 + 3x - 6$.

Determinar si presentan máximo o mínimo las siguientes funciones:

14. $y = \frac{e^x}{x}$. **15.** $y = \frac{4x^2 + 25}{10x}$.

§ 95. Problemas de la determinación del máximo y del mínimo de la función. La teoría del máximo y del mínimo de la función tiene extensa aplicación tanto en las propias matemáticas como en las disciplinas técnicas. Resolvamos algunos problemas.

PROBLEMA 1. Partir el número 20 en dos sumandos de forma que su producto tenga el valor máximo.

SOLUCIÓN. Buscaremos estos sumandos. Designemos uno de ellos con la letra x; entonces, el otro se expresará por $20 - x$. El producto de ambos es una variable que cambia al variar el sumando x. Designando el producto con la letra y, anotaremos:

$$y = x(20 - x).$$

Hemos obtenido una función que expresa la dependencia de y respecto al sumando x. En el problema se requiere hallar el valor de x en que y alcanza el máximo, es decir, *el problema se reduce al cálculo del máximo de la función*. Operemos conforme a la regla del § 94.

I. $y' = [x(20 - x)]' = (20x - x^2)' = 20 - 2x$.

II. $20 - 2x = 0$, de donde $x = 10$.

III. $y'' = (20 - 2x)' = -2$.

Por consiguiente la función presenta el máximo en $x = 10$. El número 20 debe descomponerse en dos sumandos iguales y entonces su producto será el máximo.

PROBLEMA 2. Hallar la altura del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio R.

SOLUCIÓN. Designando el radio de la base, la altura y el volumen del cono con r, h y v, respectivamente, anotaremos:

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

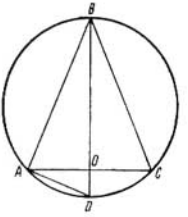


FIG. 108

Esta igualdad expresa la dependencia de v respecto a dos variables r y h; excluyamos una de ellas, r, precisamente. Para ello, del triángulo rectángulo ABD (fig. 108) deducimos (por el teorema de la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa):

$$AO^2 = BO \cdot DO,$$

o

$$r^2 = h(2R - h).$$

Sustituyendo el valor de r^2 en la fórmula del volumen del cono, obtendremos:

$$v = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h).$$

Vemos que el volumen v de un cono inscrito en una esfera de radio R es función de la altura h de este cono. Hallar la altura para la que el cono alcanza el volumen máximo significa hallar el valor de h en que la función v presenta el máximo.

Determinamos el máximo de la función v:

I. $v' = \left(\frac{2}{3}\pi R h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3\right)' = \frac{4}{3}\pi R h - \pi h^2.$

II. $\frac{4}{3}\pi R h - \pi h^2 = 0$, de donde $h_1 = 0$ y $h_2 = \frac{4}{3}R.$

III. $v'' = \left(\frac{4}{3}\pi R h - \pi h^2\right)' = \frac{4}{3}\pi R - 2\pi h.$

Sustituyamos h por $h_1 = 0$, primero, y por $h_2 = \frac{4}{3} R$, después, y obtendremos:

$$v''_{h=0} = \frac{4}{3} \pi R,$$

$$v''_{h=\frac{4}{3}R} = \frac{4}{3} \pi R - 2\pi \cdot \frac{4}{3} R = -\frac{4}{3} \pi R.$$

En el primer caso tenemos el mínimo, en el segundo, el máximo buscado.

Por consiguiente, cuando $h = \frac{4}{3} R$, el cono inscrito en una esfera de radio R alcanza el máximo volumen.

PROBLEMA 3. Una ventana tiene forma de rectángulo culminado por un semicírculo. El perímetro de la figura de la ventana es de 6 m. ¿Cuáles deberán ser sus dimensiones para que deje pasar el máximo de luz (fig. 109)?

SOLUCIÓN. Como se sabe, la cantidad de luz que pasa por una ventana es tanto mayor cuanto mayor sea el área de ésta. Designemos:

$$AD = x;$$

entonces, la longitud de la semicircunferencia BmC será $\frac{\pi x}{2}$, y la altura de la ventana

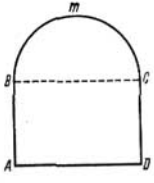


FIG. 109

$$AB = \frac{6 - AD - BmC}{2} = \frac{6 - x - \frac{\pi x}{2}}{2} =$$

$$= \frac{12 - 2x - \pi x}{4}.$$

El área de toda la ventana consta de las áreas del rectángulo $ABCD$ y del semicírculo BmC. Por las respectivas fórmulas hallaremos:

$$S_{ABCD} = \frac{12 - 2x - \pi x}{4} \cdot x = \frac{12x - 2x^2 - \pi x^2}{4}$$

y

$$S_{BmC} = \frac{\pi x^2}{8}.$$

Designando con la letra y el área de la ventana, obtendremos:

$$y = \frac{12x - 2x^2 - \pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{24x - 4x^2 - 2\pi x^2 + \pi x^2}{8} =$$

$$= \frac{24x - 4x^2 - \pi x^2}{8}.$$

Vemos que, en las condiciones de nuestro problema, el área y de la ventana es función de su base x, y el problema se ha reducido a hallar el máximo de la función y.

Analicemos el máximo de la función obtenida:

I. $y' = \left(\frac{24x - 4x^2 - \pi x^2}{8}\right)' = \frac{24 - 8x - 2\pi x}{8} =$

$$= \frac{12 - 4x - \pi x}{4}.$$

II. $\frac{12 - 4x - \pi x}{4} = 0$, de donde $x = \frac{12}{4 + \pi}$.

III. $y'' = \left(\frac{12 - 4x - \pi x}{4}\right)' = \frac{-4 - \pi}{4} = -\frac{4 + \pi}{4}$.

La segunda derivada ha resultado negativa, por lo tanto el área de la ventana es la máxima cuando $x = \frac{12}{4 + \pi}$.

Para que por una ventana cuyo contorno sea de 6 m pase la cantidad máxima de luz, su anchura debe ser igual a

$$\frac{12}{4 + \pi} \approx 1{,}68 \text{ m}.$$

Ejercicios

1. Descomponer el número 12 en dos sumandos cuyo producto tenga el valor máximo.

2. Descomponer el número 10 en dos sumandos de forma que la suma de sus cuadrados sea la mínima.

3. Descomponer el número 8 en dos sumandos de forma que la suma de sus cubos sea la mínima.

4. ¿Cuál es el número que al restarle su cuadrado arroja la diferencia máxima?

5. ¿Cuál de los rectángulos con perímetro igual a 50 cm tiene el área máxima?

6. A lo largo del límite de una parcela rectangular de tierra de 10 000 m² hay que excavar una zanja. ¿Qué dimensiones deberá tener la parcela para que la longitud de la zanja sea la mínima?

7. La suma de la base y la altura de un triángulo es igual a 10 cm. ¿Qué tamaño deberá tener la base para que el área del triángulo sea la máxima?

8. En los ángulos de una plancha de hierro cuadrada de 30 cm de lado, hay que recortar cuatro cuadraditos de modo que, después de plegar, de la parte restante, se obtenga una caja de la capacidad máxima. ¿Cuáles serán, en este caso, las dimensiones de los cuadraditos cortados?

9. *En los ángulos de una hoja de cartón rectangular de 30 × 50 cm²*, hay que recortar cuadraditos de modo que, después de plegar, de la parte restante se obtenga una caja con la superficie lateral máxima. Calcular las dimensiones de los cuadraditos recortados.

10. Una ventana tiene forma de rectángulo cuya parte superior culmina con un triángulo regular. El perímetro de la ventana es de 3 m. ¿Cuál deberá ser la base del rectángulo para que la ventana tenga el área máxima?

11. La sección de un canal de esclusa tiene forma de rectángulo terminado en semicírculo. El perímetro de la sección es de 4,5 m. ¿Qué radio deberá tener el semicírculo para que el área de la sección sea la máxima?

12. Se requiere fabricar un cajón con tapa, cuyo volumen sea de 72 dm³ y la relación entre los lados de la base, 1 : 2. ¿Qué dimensiones deberán *tener todos sus lados para que la superficie total del cajón sea la mínima?*

13. El volumen de un prisma rectangular regular es de 8 dm³. ¿Cuál deberá ser el lado de la base para que la superficie total sea la mínima?

14. Hay que guarnecer con estaño un recipiente de 4 m³ de capacidad y base cuadrada abierto por su parte superior. ¿Qué dimensiones deberá tener el recipiente para que el gasto de estaño sea el mínimo?

15. Hallar la magnitud del radio de la base y de la altura de un cilindro de 27π cm³ de volumen, cuya superficie total es la mínima.

16. ¿Qué dimensiones deberá tener un recipiente cilíndrico de 1 l de capacidad, abierto por la parte superior, para que al fabricarlo se consuma la candidad mínima de material?

17. En un triángulo isósceles de 20 cm de base y 8 cm de altura se ha inscrito un rectángulo. ¿Qué altura deberá tener este último para que su área sea la máxima?

18. *Se requiere confeccionar, con un alambre de 120 cm de largo,* el modelo de un paralelepípedo rectangular de base cuadrada. ¿Qué tamaño deberá tener el lado de la base para que la superficie total del paralelepípedo sea la máxima?

19. Con un alambre de 90 cm de largo hay que confeccionar el modelo de un prisma cuya base sea un triángulo regular. ¿Qué lado deberá tener esta última para que la superficie lateral del prisma sea la máxima?

20. Hay que fabricar un embudo cónico cuya generatriz sea igual a 20 cm. ¿Qué altura deberá tener el embudo para que su volumen sea el máximo?

21. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

22. En un cono, el radio de cuya base es de 6 cm y la altura de 15 cm, hay que inscribir un cilindro que tenga la superficie total máxima. Determinar el radio del cilindro.

23. En la parábola $y^2 = 2x$, hallar el punto más próximo al punto $A(3; 0)$.

24. Una lámpara eléctrica pende sobre el centro de una mesa redonda. ¿A qué altura hay que elevar la lámpara para que sea máxima la iluminación de un objeto que se halle sobre la mesa a 1 m de distancia del centro? (La intensidad de iluminación es directamente proporcional al seno del ángulo que el rayo incidente en el objeto forma con la tabla de la mesa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del objeto a la fuente de luz, o sea, $I = F\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{r^2}$).

25. Un cuadro de 1,4 m de altura pende de la pared de modo que su borde inferior se encuentra 1,8 m más arriba que el ojo del observador. ¿A qué distancia de la pared deberá colocarse este último a fin de adoptar la posición óptima para mirar el cuadro (es decir, que el ángulo visual sea el máximo)?

26. Un cuerpo se mueve conforme a la ley expresada por la ecuación

$$s = 10t + 18t^2 - 2t^3.$$

Hallar la velocidad máxima de desplazamiento del cuerpo.

27. El espacio recorrido por un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba a la velocidad inicial v_0, se determina por la igualdad

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Determinar la altura máxima de elevación del cuerpo.

28. La energía emitida por un elemento eléctrico se determina por la ecuación

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2},$$

donde E y r son magnitudes constantes. ¿Para qué correlación entre R y r la magnitud P presenta el máximo?

29. La solidez de una viga rectangular es proporcional al producto de su anchura por el cuadrado de la altura. Hallar las dimensiones de la viga más sólida que puede obtenerse de un tronco cilíndrico de a cm de diámetro.

30. De un tronco circular de diámetro d hay que cortar una viga de sección rectangular, de modo que ésta sea igual a todo lo largo. Sabiendo que la resistencia a la compresión es proporcional a la superficie de la sección, determinar la dimensión que deberán tener los lados de la sección rectangular para que la citada resistencia sea la máxima.

31. El momento de flexión en cualquier punto A de una viga apoyada sobre dos soportes con una carga distribuida uniformemente a todo su largo l, se determina por la igualdad

$$M = \frac{1}{2} qlx - \frac{1}{2} qx^2,$$

donde x es la distancia del punto A a uno de los soportes y q, la carga por unidad de longitud de la viga. Mostrar que el momento máximo de flexión se halla en el centro de la viga. Determinar la magnitud de dicho momento.

§ 96. Construcción de los gráficos de las funciones. En el presente capítulo nos hemos familiarizado con el análisis de las propiedades de las funciones por sus derivadas. El conocimiento de estas propiedades nos permite tener la representación de la función y construir su gráfico.

EJEMPLO. Construir el gráfico de la función

$$y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}.$$

SOLUCIÓN. Analicemos la función dada respecto al máximo y al mínimo.

I. $y' = \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}\right)' = \frac{1}{2}x^2 - 2x.$

II. $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$ ó $x^2 - 4x = 0$, de donde $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.

III. $y'' = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)' = x - 2,$

$y''_{x=0} = 0 - 2 = -2,$

$y''_{x=4} = 4 - 2 = +2.$

La función presenta el máximo en $x = 0$, y el mínimo, en $x = 4$.

IV. Hallemos las ordenadas de los puntos correspondientes al máximo y al mínimo de la función:

$$y_{x=0} = \frac{1}{6} \cdot 0^3 - 0^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

$$y_{x=4} = \frac{1}{6} \cdot 4^3 - 4^2 + \frac{2}{3} = \frac{32}{3} - 16 + \frac{2}{3} = -4\frac{2}{3}.$$

Las coordenadas de los puntos buscados son $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ y $\left(4; -4\frac{2}{3}\right)$.

Determinemos ahora si la función dada tiene punto de inflexión, para lo cual la segunda derivada se iguala a cero:

$$x - 2 = 0,$$

de donde

$$x = 2.$$

Para cerciorarse de que en $x = 2$ tiene lugar una inflexión, determinamos el signo de la segunda derivada para $x < 2$ y $x > 2$; como resultado obtendremos:

$$y''_{x=1} = 1 - 2 = -1,$$
$$y''_{x=3} = 3 - 2 = +1.$$

El cambio de los signos de la segunda derivada muestra que al argumento $x = 2$ le corresponde un punto de inflexión. Hallemos su ordenada:

$$y = \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2^2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - 4 + \frac{2}{3} = -2;$$

las coordenadas del punto de inflexión son $(2; -2)$.

Para representar con mayor claridad el gráfico de la función dada, calculemos las coordenadas de algunos puntos más *). Suponiendo, por ejemplo, $x = -2$ y $x = 6$, obtendremos:

$$y_{x=-2} = \frac{1}{6} \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} - 4 + \frac{2}{3} = -4\frac{2}{3},$$

$$y_{x=6} = \frac{1}{6} \cdot 6^3 - 6^2 + \frac{2}{3} = 36 - 36 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Las coordenadas de los puntos adicionales son $\left(-2; -4\frac{2}{3}\right)$ y $\left(6; \frac{2}{3}\right)$. Confeccionemos la tabla de los valores hallados para las coordenadas de los puntos:

x	-2	0	2	4	6
y	$-4\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-2	$-4\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

*) Con frecuencia resulta útil hallar los puntos de intersección de la curva con los ejes de coordenadas; pero, muchas veces ello presenta grandes dificultades cuando se resuelven ecuaciones de grados superiores o ecuaciones transcendentes.

Construyamos todos estos puntos y tracemos por ellos una línea suave (fig. 110).

Para construir el gráfico de una función es necesario:

1. Hallar los valores de x en los que la función dada presenta un máximo o un mínimo.

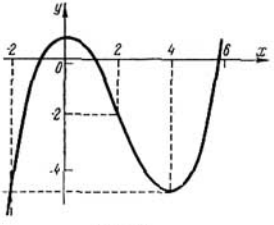


FIG. 110

2. Hallar los valores de x en los que el gráfico de la función tiene punto de inflexión.

3. Calcular los valores de las ordenadas de los puntos, correspondientes a los valores hallados de las abscisas; agregando a estos puntos algunos más, anotar en una tabla los valores hallados de x e y.

4. Construir los puntos hallados y trazar por ellos una línea suave.

Ejercicios

Construir los gráficos de las funciones:

1. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. **2.** $y = 2x^2 + 6x$. **3.** $y = -2x^2 + 4x$. **4.** $y = x^2 - 6x + 5$. **5.** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3{,}5$. **6.** $y = x^4$. **7.** $y = x^5$. **8.** $y = x^3 + x$. **9.** $y = x^3 - 3x$. **10.** $y = \frac{1}{3}x^3 - 4$. **11.** $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 1$. **12.** $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 2$. **13.** $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$ **14.** $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. **15.** $y = \frac{1}{4}x^4 - 8x$. **16.** $y = x^4 - 2x^3 + 3$.

Capítulo X
La diferencial

§ 97. Comparación de magnitudes infinitesimales entre sí. Concepto de diferencial. I. En el § 44 hemos examinado las operaciones con infinitesimales y mostrado que los resultados de su adición, sustracción y multiplicación son también infinitesimales. Sin embargo, el cociente de dividir dos infinitesimales puede ser no sólo un infinitésimo, sino asimismo una magnitud infinitamente grande y finita.

En efecto, sea α, por ejemplo, una infinitesimal; entonces, α^2 y 2α serán también infinitesimales. Al dividirlas entre sí, son posibles los siguientes casos:

1) el cociente $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$ es una infinitesimal,

2) el cociente $\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$ es una magnitud infinitamente grande y

3) el cociente $\frac{2\alpha}{\alpha} = 2$ es una magnitud finita.

El primer cociente muestra que la infinitesimal α^2 es una parte ínfima de α y, por lo tanto, tiende a cero mucho más de prisa que α.

El segundo indica que α, aunque disminuya indefinidamente, sigue siendo mucho mayor que α^2, o sea, tiende a cero más despacio que la magnitud α^2.

Lo dicho puede ilustrarse en la siguiente tabla:

α	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\ldots \to 0$
α^2	1	0,01	0,0001	0,000001	0,00000001	$\ldots \to 0$
$\frac{\alpha^2}{\alpha}$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\ldots \to 0$
$\frac{\alpha}{\alpha^2}$	1	10	100	1000	10000	$\ldots \to \infty$

Se ha aceptado dar el nombre de infinitesimal de *orden superior* a la infinitesimal α^2 respecto a la α, y a esta última, infinitesimal de *orden inferior* respecto a la infinitesimal α^2.

En lo que se refiere a la tercera relación, de ella se deduce que las infinitesimales 2α y α tienden a cero con la misma rapidez, por cuanto al variar, el cociente $\frac{2\alpha}{\alpha}$ se mantiene constante. Suele decirse que estas infinitesimales son del *mismo orden.*

Así, pues, el cociente de la división de dos infinitesimales permite compararlas entre sí. Esta comparación es de especial utilidad cuando se efectúan cálculos aproximados donde el despreciar infinitesimales de orden superior simplifica considerablemente las operaciones.

EJEMPLO 1. Comparar el orden del infinitésimo de $x^2 + x^3$ y x, si $x \to 0$.

SOLUCIÓN. Hallemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3}{x} = \lim_{x\to 0} (x + x^2) = 0 + 0 = 0.$$

Por consiguiente, el orden de la infinitesimal $x^2 + x^3$ es superior al de x.

EJEMPLO 2. Comparar el orden del infinitésimo de $3x + x^3$ y x, si $x \to 0$.

SOLUCIÓN.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x + x^3}{x} = \lim_{x\to 0} (3 + x^2) = 3 + 0 = 3.$$

Como se ve, las infinitesimales $3x + x^3$ y x *son del mismo* orden.

EJEMPLO 3. Comparar el orden del infinitésimo de $\sqrt{x}$ y x, si $x \to 0$.

SOLUCIÓN.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Por lo tanto, el orden de la infinitesimal $\sqrt{x}$ es inferior al de x.

EJEMPLO 4. Comparar el orden del infinitésimo de $3 \operatorname{sen}^3 x$ y $2 \operatorname{tg}^2 x$, si $x \to 0$.

SOLUCIÓN. En el § 49 se mostró que sen x y tg x equivalen a x cuando $x \to 0$ y, por lo tanto sen x y tg x se pueden sustituir por x. Tomado esto en consideración, hallaremos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{sen}^3 x}{2\,\mathrm{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{3(\mathrm{sen}\ x)^3}{2(\mathrm{tg}\ x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} x = 0.$$

De aquí se evidencia que el orden de la infinitesimal $3\ \mathrm{sen}^3 x$ es superior al de $2\ \mathrm{tg}^2 x$.

EJEMPLO 5. Mostrar que, si $x \to 0$, $2\ \mathrm{tg}^2 x + 3\ \mathrm{sen}^3 x$ y x^2 son infinitesimales del mismo orden.

SOLUCIÓN. Sabiendo que tg x y sen x equivalen a x cuando $x \to 0$, hallaremos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{sen}^3 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 3x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} (2+3x) = 2+0 = 2.$$

Así, pues, las infinitesimales $2\ \mathrm{tg}^2 x + 3\ \mathrm{sen}^3 x$ y x^2 son del mismo orden.

La solución de este ejemplo puede simplificarse algo si $3\ \mathrm{sen}^3 x$ se desprecia como infinitesimal de orden superior al de $\mathrm{tg}^2 x$ (véase el ejemplo 4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{tg}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Se ha obtenido el mismo resultado.

II. Tomemos la función $y = x^2$; su incremento

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \qquad [(3)\ \S\ 55].$$

El coeficiente de Δx es la derivada de la función dada y, por lo tanto, la última igualdad se puede transcribir así:

$$\Delta y = y'\Delta x + (\Delta x)^2. \qquad (1)$$

Comparemos la variación de la magnitud de ambos sumandos del miembro derecho de la igualdad (1), si Δx disminuye. Suponiendo, por ejemplo, $x = 2$ y, por consiguiente, $y' = 4$, confeccionemos la siguiente tabla de valores de estos sumandos:

Δx	1	0,1	0,01	0,001
$y'\Delta x$	4	0,4	0,04	0,004
$(\Delta x)^2$	1	0,01	0,0001	0,000001

Como se ve en la tabla, los sumandos $y'\Delta x$ y $(\Delta x)^2$ disminuyen al disminuir Δx; además, el primero, proporcionalmente a Δx, y el segundo, mucho más deprisa.

Mostremos que esto se verifica para toda función diferenciable $f(x)$.

Sea dada la función $y = f(x)$. Su derivada

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

De acuerdo con la definición del límite de una variable (§ 43), tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

donde α es una infinitesimal cuando $\Delta x \to 0$. De aquí

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x. \tag{2}$$

También en este caso, al disminuir Δx el primer sumando $y'\Delta x$ disminuye proporcionalmente a Δx, y el segundo $\alpha\Delta x$, más deprisa, por cuanto la relación $\frac{\alpha\Delta x}{y'\Delta x} = \frac{\alpha}{y'}$ es una infinitesimal si $y' \neq 0$, es decir, el orden de la infinitesimal $\alpha\Delta x$ es superior al de $y'\Delta x$. Por lo que la expresión $y'\Delta x$ recibe el nombre de *parte principal del incremento* de la función $y = f(x)$.

DEFINICIÓN. *La parte principal $y'\Delta x$ del incremento de la función $y = f(x)$ se llama diferencial de la función.*

La diferencial de la función $y = f(x)$ se designa con el símbolo dy. De este modo

$$dy = y'\Delta x. \tag{3}$$

La diferencial del argumento dx se toma igual al incremento del argumento Δx, o sea,

$$dx = \Delta x.$$

Por este motivo, la igualdad (3) puede anotarse en la siguiente forma:

$$dy = y'dx. \tag{4}$$

o sea, *la diferencial de la función es igual al producto de la derivada de la función por la diferencial del argumento.*

De la fórmula (4) se deduce:

$$y' = \frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

La igualdad (5) muestra que ***la derivada de la función es la razón de la diferencial de la función a la diferencial del argumento.*** Sobre la base de esto, la derivada de la función se expresa con frecuencia en la forma $\frac{dy}{dx}$ y se lee "***d y*** entre dx".

III. Sustituyendo en la igualdad (2) $y'\Delta x$ por el símbolo dy, escribiremos:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{6}$$

Como se mostró anteriormente, el orden de la infinitesimal $\alpha\Delta x$ es superior al de $y'\Delta x = dy$ y, por lo tanto, despreciando el sumando $\alpha\Delta x$ en la igualdad (6), obtendremos:

$$\Delta y \approx dy. \tag{7}$$

En los problemas prácticos se aplica con frecuencia la fórmula (7), es decir, se toma la diferencial de la función en lugar de su incremento, siendo el error insignificante y tanto menor cuanto menor sea Δx.

Nota. Si se tiene una función lineal, $\Delta y = dy$. En efecto, para la función $y = kx + b$ el incremento será:

$$\Delta y = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) =$$
$$= kx + k\Delta x + b - kx - b = k\Delta x.$$

El factor k es la derivada de la función lineal, por lo que el miembro derecho de la última igualdad expresa la diferencial de la función dada, o sea,

$$k\Delta x = dy.$$

Así, pues, si la función es lineal

$$\Delta y = dy.$$

Ejercicios

1. Mostrar que si $x \to 0$
a) $5x^3$ es una infinitesimal de orden superior al de x;
b) $3x$ y x son infinitesimales del mismo orden y
c) $\sqrt[3]{x^2}$ es una infinitesimal de orden inferior al de x.

2. Mostrar que, si $x \to 0$, $2x^3 + 4x$ y x son infinitesimales del mismo orden.

3. Mostrar que, si $x \to 0$, $2x^3 + 4x^2$ es una infinitesimal de orden superior al de x.

4. Mostrar que si $x \to 0$

a) 2 sen x y x son infinitesimales del mismo orden;
b) $\text{sen}^2 x$ es una infinitesimal de orden superior al de x y
c) tg $3x$ y x son infinitesimales del mismo orden.

5. Comparar el orden del infinitésimo de sen $2x$ + tg $3x$ y x cuando $x \to 0$.

6. Comparar el orden del infinitésimo:

a) $1 - \cos x$ y x, si $x \to 0$;
b) $1 - \cos x$ y x^2, si $x \to 0$;
c) $\sqrt{1 - \cos x}$ y x, si $x \to 0$.
d) $\text{tg}^3 x$ y x^3, si $x \to 0$ y
e) $1 - \cos 2x$ y x, si $x \to 0$.

7. Comparar el orden del infinitésimo:

a) $1 - x$ y $1 - x^2$, si $x \to 1$;

b) cos x y sen $2x$, si $x \to \dfrac{\pi}{2}$;

c) sen x y $1 - \cos x$, si $x \to 0$.

d) cos $2x$ y ctg $2x$, si $x \to \dfrac{\pi}{2}$ y

e) $\cos^2 x$ y sen $2x$, si $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

8. Mostrar que tg x — sen x y x^3 son infinitesimales del mismo orden si $x \to 0$.

§ 98. Representación geométrica de la diferencial. Tomemos la función $y = f(x)$ cuyo gráfico está representado en la fig. 111. Sea la abscisa del punto M

$$OP = x;$$

entonces, su ordenada

$$PM = y = f(x).$$

Demos al argumento x el incremento $PP_1 = dx$ y en el punto P_1 levantemos P_1M_1 perpendicular al eje Ox, y desde el punto M tracemos $MQ \parallel Ox$. Entonces, como se sabe (§ 56),

$$QM_1 = \Delta y.$$

Tracemos la tangente a la curva en el punto M. El segmento QN obtenido, igual al incremento de la ordenada del punto M que se desplaza por la tangente, recibe el nombre de incremento de la ordenada de la tangente. Del triángulo rectángulo MNQ, tenemos:

$$QN = MQ \text{ tg } \sphericalangle NMQ.$$

Pero

$$MQ = PP_1 = dx,$$

y recordando el concepto geométrico de la derivada (§ 66), anotaremos:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle NMQ = \operatorname{tg} \alpha = y'.$$

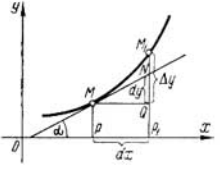


FIG. 111

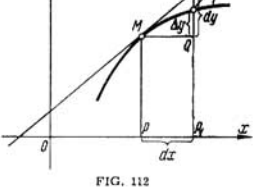


FIG. 112

Por esta razón

$$QN = y'dx.$$

De acuerdo con (4) (§ 97)

$$y'dx = dy,$$

por consiguiente,

$$QN = dy.$$

De este modo, si en el punto M de la curva $y = f(x)$ se traza una tangente, *la diferencial de la función $y = f(x)$ en este punto estará representada por el incremento de la ordenada de la tangente, que corresponde al incremento dx de su abscisa.*

La diferencial de la función en un punto dado puede ser tanto menor que su incremento (fig. 111), como mayor (fig. 112).

§ 99. Diferencial de segundo orden. La diferencial dy de la función $y = f(x)$, denominada *primera diferencial* o *diferencial de primer orden* es también función de x y, por lo tanto, puede hallarse su diferencial que recibe el nombre de *segunda diferencial* o *diferencial de segundo orden*. En este caso, se escribe $d(dy)$ o, abreviando, d^2y y se lee: "d dos y".

Hallemos la expresión de la diferencial de segundo orden de la función por su derivada. Para esto diferenciemos respecto a x la igualdad

$$dy = y'dx,$$

considerando que dx es un factor constante (por cuanto dx no depende de x):

$$d^2y = d(y'dx) = d(y')\ dx.$$

Pero conforme a la fórmula (4) (§ 97).

$$d(y') = (y')'dx = y''dx.$$

Por esto

$$d^2y = y''dx \cdot dx = y''dx^2, \qquad (1)$$

es decir, *la segunda diferencial es igual al producto de la segunda derivada de la función por el cuadrado de la diferencial del argumento.*

De la igualdad (1) se deduce

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Esto permite expresar la segunda derivada de la función en forma de cociente $\frac{d^2y}{dx^2}$ que se lee así: "d dos y entre d x cuadrado".

§ 100. Aplicación de la diferencial a cálculos aproximados. Examinemos algunos ejemplos de utilización de la diferencial en cálculos aproximados.

a) **Determinación del incremento de la función.**

EJEMPLO 1. Hallar aproximadamente el incremento de la función $y = 2x^2 + 3$ si $x = 2$ y $\Delta x = 0{,}001$.

SOLUCIÓN. Como el incremento del argumento es una magnitud pequeña, de acuerdo con la fórmula (7) (§ 97) el incremento de la función puede sustituirse por su diferencial.

Mas la diferencial de la función dada es

$$dy = (2x^2 + 3)'dx = 4xdx \qquad (1)$$

Sustituyendo en la igualdad (1) x y dx por sus valores se tiene:

$$dy + 4 \cdot 2 \cdot 0{,}001 = 0{,}008.$$

Por consiguiente

$$\Delta y \approx 0{,}008.$$

Veamos qué error se comete al tomar la diferencial en lugar del incremento. Para ello, hallemos el valor exacto del incremento de la función (véase el ejemplo 1, § 55):

$$\Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 2(0{,}001)^2 = \\ = 0{,}008 + 0{,}000002 = 0{,}008002.$$

Comparando el valor exacto de Δy con el aproximado vemos que el error cometido es igual a 0,000002. Expresándolo en tantos por ciento, se tiene:

$$\frac{0{,}000002}{0{,}008002} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\%.$$

El error ha resultado muy pequeño.

EJEMPLO 2. Al calentar una bola de radio $R = 20$ cm, su radio se alargó en 0,01 cm. ¿Cuanto aumentó el volumen de la bola?

SOLUCIÓN. El volumen de la bola (esfera) se determina por la fórmula

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Conforme a la ley expresada por esta fórmula, a cada valor de R le corresponde un valor determinado de v, o sea, v es función de R. Por lo tanto, nuestro problema se reduce a determinar el incremento de la función v para un incremento determinado del argumento R. Como este último incremento es pequeño ($\Delta R = dR = 0{,}01$), el incremento de la función puede sustituirse por su diferencial [(7), § 97].

Hallamos la diferencial de la función v:

$$dv = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 dR = 4\pi R^2\, dR.$$

Pero

$$R = 20 \quad \text{y} \quad dR = 0{,}01.$$

Por ello,

$$dv = 4\pi \cdot 20^2 \cdot 0{,}01 = 16\pi \text{ cm}^3.$$

b) **Cálculo del valor numérico de la función.** Sea necesario hallar el valor aproximado de la función

$$f(x) = 2x^2 + 3$$

si $x_1 = 2{,}001$, o sea, la magnitud de $f(2{,}001)$.

Representemos x_1 en forma de suma

$$x_1 = 2 + 0{,}001,$$

donde consideraremos que 0,001 es el incremento del argumento.

De la fórmula para el incremento de la función

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

hallaremos:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y.$$

Suponiendo que Δx es una magnitud pequeña, podemos sustituir Δy por dy; entonces, la última igualdad se transcribirá en la forma

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy. \qquad (2)$$

Aplicando la igualdad (2) a este ejemplo, podemos anotar:

$$f(2 + 0{,}001) \approx f(2) + dy.$$

Pero

$$dy = 4x dx = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}001 = 0{,}008,$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 = 11.$$

Por lo que

$$f(2 + 0{,}001) = f(2{,}001) \approx 11 + 0{,}008 = 11{,}008.$$

La igualdad (2) puede servir de fórmula para el cálculo aproximado del valor de la función.

c) **Cálculo por fórmulas aproximadas.** Utilizando la fórmula (2), deduzcamos las fórmulas aproximadas para el cálculo de algunas expresiones.

1) Tomemos la función

$$y = \text{sen } x$$

y supongamos que el ángulo x, igual a cero, recibe un incremento α muy pequeño. Apliquemos la fórmula (2), suponiendo en ella $x = 0$ y $dx = \alpha$. Obtendremos:

$$f(0 + \alpha) \approx f(0) + dy.$$

Pero

$$dy = (\operatorname{sen} x)' dx = \cos x \cdot dx = \cos 0 \cdot \alpha = \alpha$$

y

$$f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Por lo tanto

$$f(0 + \alpha) \approx 0 + \alpha,$$

o

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha.$$

De aquí se deduce que el seno de un ángulo muy pequeño es aproximadamente igual al propio ángulo; además es necesario recordar que el ángulo debe expresarse en radianes. Por ejemplo, sen 0,003 ≈ 0,003. En efecto, expresando este ángulo en grados, hallaremos:

$$\frac{180^\circ \cdot 0{,}003}{3{,}14} \approx 0{,}17^\circ \approx 10',$$

pero

$$\operatorname{sen} 10' = 0{,}003.$$

2) Tomemos la función $y = x^n$ y supongamos que x, igual a 1, recibe un incremento $\Delta x = \alpha$ muy pequeño en comparación con la unidad. Entonces, de acuerdo con la fórmula (2), se tiene:

$$f(1 + \alpha) \approx f(1) + dy.$$

Pero

$$dy = (x^n)' dx = nx^{n-1} dx = n \cdot 1^{n-1} \cdot \alpha = n\alpha$$

y

$$f(1) = 1^n = 1.$$

Por eso

$$f(1 + \alpha) \approx 1 + n\alpha,$$

o

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha. \tag{3}$$

De este mismo modo exactamente se puede deducir la igualdad

$$(1 - \alpha)^n \approx 1 - n\alpha. \tag{4}$$

Por las fórmulas (3) y (4) puede calcularse aproximadamente la potencia de un número próximo a la unidad; por ejemplo:

$$1{,}015^2 = (1 + 0{,}015)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}015 = 1{,}03,$$

$$0{,}988^3 = (1 - 0{,}012)^3 \approx 1 - 3 \cdot 0{,}012 = 0{,}964.$$

3) Deduzcamos la fórmula para el cálculo aproximado de la expresión $\sqrt[n]{1 + \alpha}$, donde α tiene un valor pequeño en comparación con la unidad. Para este fin, representemos $\sqrt[n]{1 + \alpha}$ en forma de potencia

$$\sqrt[n]{1 + \alpha} = (1 + \alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

Mas, por la fórmula (3)

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}\alpha,$$

o

$$\sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{n}\alpha. \tag{5}$$

De modo análogo se deduce la fórmula

$$\sqrt[n]{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{1}{n}\alpha. \tag{6}$$

Por las fórmulas (5) y (6) puede hallarse fácilmente el valor de la raíz de un número próximo a la unidad; por ejemplo:

$$\sqrt{1{,}03} = \sqrt{1 + 0{,}03} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}03 = 1{,}015,$$

$$\sqrt[3]{0{,}964} = \sqrt[3]{1 - 0{,}036} \approx 1 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}036 = 0{,}988.$$

Ejercicios

Hallar la primera diferencial de las funciones:

1. $y = x\sqrt{x}$. 2. $s = \dfrac{1-t}{1+t}$. 3. $v = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{\omega}$ 4. $y = \operatorname{sen}^2\sqrt{x}$.

5. $u = \ln^2\dfrac{1}{t}$. 6. $y = ln\sqrt{\dfrac{1}{x}}$. 7. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+x}$.

8. Hallar la diferencial del espacio expresado por la ecuación $s = 5t^2$, si $t = 4$ y $\Delta t = 0{,}01$.

9. Calcular aproximadamente el incremento de la función $y = x^3 - 5x^2 + 80$ al pasar el argumento de $x = 4$ a $x = 4{,}001$.

10. El lado de un cuadrado es igual a 5 cm. Hallar el incremento aproximado de su área si el lado aumenta 0,01 cm.

11. Hallar el incremento aproximado del área de un círculo, si su radio varía de 50 cm a 50,1 cm.

12. El lado de un cubo, igual a 1 m, se alargó 10 cm. ¿Cuánto aumentó el volumen del cubo?

13. Un paralelepípedo rectángulo de 10 cm de altura tiene por base un cuadrado cuyo lado es igual a 20 cm. ¿Cuánto aumentará el volumen del paralelepípedo si el lado de la base se alarga 0,02 cm?

14. En un cono el radio de la base es igual a 15 cm y la altura contiene 20 cm. ¿Cuánto aumentará su volumen si el radio de la base se alarga 0,04 cm?

15. Al calentar una esfera de radio $R = 9$ cm, su volumen aumentó $32{,}4\pi$ cm^3. Hallar el alargamiento del radio de la esfera.

16. Al calentar un cubo de radio $a = 10$ cm, aumentó en 0,06 de su volumen. Hallar el alargamiento de la arista del cubo.

17. Al calentar una esfera, aumentó en 0,0024 de la magnitud de su volumen. ¿En qué tanto por ciento aumentó la longitud de su radio?

18. ¿Qué tanto por ciento constituirá el error cometido en el cálculo del área de un círculo, si al medir su radio se cometió un error del 1%?

19. El volumen de un cubo aumentó en el 6% de su magnitud. ¿En qué tanto por ciento aumentó su arista?

Hallar el valor aproximado de las siguientes funciones:

20. $y = x^2 + x$, si $x = 3{,}01$.

21. $y = 3x^2 + 2x - 1$, si $x = 2{,}03$.

22. $y = x^3 + x^2 - 2x$, si $x = 2{,}01$.

23. $y = \dfrac{1}{2}x^3 - 5x^2 + x - 1$, si $x = 2{,}1$.

24. $y = x^3 - 2x + 1$, si $x = 0{,}02$.

25. $y = x^3 - 4x^2 + 1$, si $x = -2{,}03$.

26. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y}}$, si $x = 4{,}2$.

§ 101. **Curvatura de la curva.** Sea dada una curva que se define por la ecuación $y = f(x)$ (fig. 113). Tomemos en la misma dos puntos A y B y tracemos en ellos las tangentes a la curva. Al pasar del punto A al B,

la tangente cambia en cierta magnitud el ángulo que forma con el sentido positivo del eje de abscisas. Si designamos con α el ángulo que la tangente en el punto A forma con el eje Ox, entonces, el que la tangente en el punto B forma con ese mismo eje, al recibir el incremento Δx, será igual a $\alpha + \Delta\alpha$, y el ángulo entre dichas tangentes, $\Delta\alpha$, como evidencia la fig. 113. La magnitud $\Delta\alpha$ puede considerarse como el ángulo de desviación de la tangente respecto a su posición inicial.

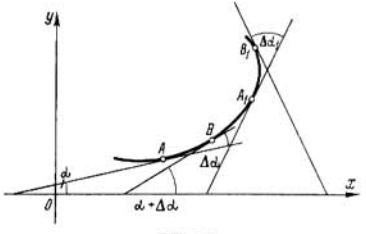


FIG. 113

Dividiendo $\Delta\alpha$ por la longitud del arco $AB = \Delta s$, obtenemos la magnitud media del ángulo de desviación por unidad de longitud del arco. La razón $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ recibe el nombre de *curvatura media de la curva* en su parte AB. La curvatura media de la curva en sus distintas partes puede ser diferente.

Admitamos ahora que el punto B, al moverse por la curva, se aproxima infinitamente al A y Δs disminuye, tendiendo a cero; entonces, el límite de la razón $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ definirá *la curvatura de la curva en el punto A*. Designando con la letra K la curvatura de la curva en ese punto, tendremos:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

DEFINICIÓN. *Se llama curvatura de la curva en un punto dado A de la misma el límite a que tiende la curvatura media del arco AB cuando el punto B se aproxima infinitamente al A.*

Conforme a la definición de la derivada (§ 63)

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds};$$

por eso,

$$K = \frac{d\alpha}{ds}. \qquad (1)$$

Transformemos el miembro derecho de esta igualdad expresando $d\alpha$ y ds por las derivadas de la función $y = f(x)$.

De acuerdo con el concepto geométrico de la derivada (§ 66), se tiene

$$\operatorname{tg}\alpha = y',$$

donde α es el ángulo que la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto A forma con el sentido positivo del eje de abscisas (fig. 113); de donde

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\, y'.$$

En esta igualdad arc tg y' es una función compuesta, por cuanto arc tg y' depende de y', y esta última, de x. Diferenciemos respecto al argumento x la última igualdad; obtendremos:

$$\frac{d\alpha}{dx} = (\operatorname{arc\,tg}\, y')' = \frac{1}{1 + (y')^2}\,(y')' = \frac{y''}{1 + (y')^2},$$

de aquí

$$d\alpha = \frac{y''dx}{1 + (y')^2}. \tag{2}$$

Hallemos la expresión ds por la derivada de la función $y = f(x)$. Para ello, volvamos a tomar ese mismo arco AB de la curva (fig. 114). Consideraremos la longitud de AB como el incremento del arco M_0A correspondiente a los incrementos $PQ = \Delta x$ y $RB = \Delta y$. Si Δx es suficientemente pequeño, el segmento de arco AB puede considerarse recto; en este caso, aplicando el teorema de Pitágoras, obtendremos:

$$AB^2 = AR^2 + RB^2,$$

o

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

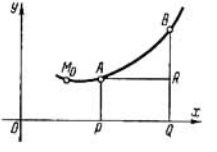


FIG. 114

Dividiendo por $(\Delta x)^2$ ambos miembros de la igualdad, hallaremos:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

de aquí

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Supongamos que $\Delta x \to 0$; entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Aplicando los teoremas del límite de la raíz, la suma y la potencia (§ 45), obtendremos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{\lim_{\Delta x\to 0}\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}=\sqrt{\lim_{\Delta x\to 0}1+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y}{x}\right)^2}. \qquad (3)$$

Pero

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{ds}{dx} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y';$$

por lo que la igualdad (3) tomará la forma

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+(y')^2},$$

de donde

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (4)$$

Sustituyendo los valores $d\alpha$ y ds en la expresión (1), obtendremos:

$$K=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{y''dx}{1+(y')^2}:\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{y''}{[1+(y')^2]\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}},$$

$$K=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}. \qquad (5)$$

La fórmula (5) permite hallar la curvatura de una curva definida por la ecuación $y=f(x)$, en un punto cualquiera de la misma.

§ 102. Curvatura de la circunferencia. La curvatura de la circunferencia puede determinarse por la fórmula (5) (§ 101), pero es mucho más sencillo hallarla por medio de los siguientes razonamientos.

Tracemos las tangentes en dos puntos A y B de la circunferencia (fig. 115). Designando el arco AB con Δs, hallemos la curvatura media en esta parte; se expresará por el quebrado $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. Trazando los radios a los puntos de tangencia, obtendremos:

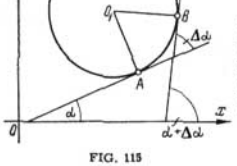


FIG. 115

$$\sphericalangle AO_1B=\Delta\alpha,$$

por cuanto los ángulos AO_1B y $\Delta\alpha$ están formados por rectas perpendiculares *entre sí. Pero, como se sabe, el ángulo* en radianes se mide por la razón de cociente de la longitud del arco al radio; por consiguiente,

$$\Delta\alpha=\frac{\Delta s}{R},$$

de donde

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}.$$

Es evidente que, tomando otro segmento cualquiera de la circunferencia, llegaríamos a esta misma conclusión. Por lo tanto

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

para todo punto de la circunferencia, es decir, *la curvatura de la circunferencia es constante en todos sus puntos e igual a la magnitud inversa del radio.*

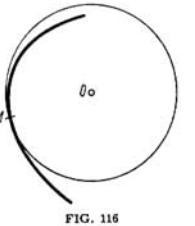


FIG. 116

§ 103. Radio de curvatura de la curva. Cuando se estudia la curvatura de una curva, se toma una circunferencia cuya curvatura sea igual a la de la curva en uno u otro punto de la misma. El centro de esta circunferencia se denomina *centro de curvatura de la curva en el punto correspondiente;* el radio, *radio de curvatura en ese punto,* y la circunferencia, *círculo osculador* (fig. 116)

DEFINICIÓN. *Se llama círculo osculador en el punto M de una curva la circunferencia que pasa por ese punto, tiene igual curvatura que la curva y una tangente común con la misma.*

Observemos que el centro del círculo osculador se sitúa siempre en la parte cóncava de la curva.

Sabemos (véase el § 102) que la curvatura de la circunferencia

$$k = \frac{1}{R},$$

de donde

$$R = \frac{1}{K}.$$

Por consiguiente, el radio de curvatura de la curva en un punto de ella se define por esa misma igualdad.

Sustituyendo K por su valor tomado de la igualdad (5) (§ 101), obtendremos la fórmula para determinar el radio de curvatura de una curva en un punto cualquiera de ella:

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}. \qquad (1)$$

Aplicando esta fórmula a una recta dada, por ejemplo, por la ecuación $y = kx + b$, obtendremos:

$$R = \frac{(1 + k^2)^{3/2}}{0} = \infty,$$

por cuanto $y' = k$ e $y'' = 0$.

Esto significa que la línea recta puede considerarse como una circunferencia de radio infinitamente grande.

EJEMPLO. Hallar el radio de curvatura de la curva $y = 2x^2$ en su punto con la abscisa igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SOLUCIÓN. Ante todo hallemos la primera y la segunda derivadas de la función $y = 2x^2$ para el punto con la abscisa $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$y' = (2x^2)' = 4x \quad \text{e} \quad y'_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$y'' = (4x)' = 4 \quad \text{para todo } x.$$

Sustituyendo los valores de y' e y'' en la fórmula (1), obtendremos:

$$R = \frac{[1 + (2\sqrt{2})^2]^{3/2}}{4} = \frac{(1+8)^{3/2}}{4} = \frac{\sqrt{9^3}}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75.$$

Ejercicios

Hallar el radio de curvatura de las siguientes curvas:

1. $y = x^2 + x$ en el punto $0(0;\ 0)$.
2. $y = x^2 - x + 1$ en el punto con abscisa $x = \frac{1}{2}$.
3. $xy = 4$ en el punto $A(2;\ 2)$.
4. $y^2 = 4x^3$ en el punto $A(1;\ 2)$.
5. $y^2 = x^3 + x$ en el punto con la abscisa $x = 1$.
6. $y = e^x$ en el punto $A(0;\ 1)$.
7. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto con la abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.
8. $y = \cos x$ en el punto $A\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$.
9. En la curva $y = \frac{1}{2}x^2$, hallar el punto en que el radio de curvatura es el mínimo.

Capítulo XI
La integral

§ 104. Concepto de integral indefinida. Cuando se tiene una función, puede hallarse su derivada; basta con aplicar las reglas que ya conocemos. Como sabemos, este cálculo es de gran importancia práctica. Por ejemplo, si se da la ley del movimiento de un cuerpo, hallamos su velocidad como derivada del espacio respecto al tiempo (§ 61 y § 63); por la ecuación de una curva determinamos, mediante la derivada, el coeficiente angular de la tangente trazada a este curva (§ 66), etc.

Sin embargo, con frecuencia se precisa resolver el problema inverso: por la velocidad conocida del movimiento de un cuerpo, determinar la ley de este movimiento; por el coeficiente angular dado de la tangente a la curva hallar la ecuación de esta curva, etc., es decir, por una derivada dada, hallar la función de la que se deriva. Por este motivo necesitamos conocer las reglas para resolver el citado problema.

Señalemos que la función no sólo puede hallarse por su derivada dada, sino también por su diferencial, por cuanto la derivada y la diferencial presentan una correlación sencilla [(4) (§ 97)]. Prácticamente es más cómodo buscar la función por su diferencial; por ello, a continuación emplearemos la diferencial para resolver el problema inverso.

Sea la función

$$y = F(x) \tag{1}$$

que tiene la derivada $f(x)$; entonces, su diferencial

$$dy = f(x)\ dx. \tag{2}$$

La función (1) se llama *primitiva* con relación a su diferencial (2).

DEFINICIÓN. *Se llama función primitiva de la expresión* $f(x)\,dx$ *la función* $F(x)$ *cuya diferencial es igual a* $f(x)\,dx$.

Sin embargo, a la diferencial de una función le corresponde no una primitiva única, sino un conjunto de ellas que se diferencian entre sí por un sumando constante. En efecto, sea $F(x)$ la primitiva para la diferencial $f(x)\,dx$. Entonces, toda función de la forma $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria, será primitiva para $f(x)\,dx$, por cuanto

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Y, al contrario, sean $F(x)$ y $\Phi(x)$ dos funciones primitivas de la diferencial $f(x)\,dx$. Veamos la función $\Psi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Por la definición de la primitiva $\Psi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Por consiguiente $\Psi(x) = C$ es constante, ya que sólo la derivada de una magnitud constante es igual a cero.

Así, pues,

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Si se dan a C todos los valores posibles, entonces, conociendo la primitiva $F(x)$, obtendremos todas las primitivas para la diferencial $f(x)\,dx$.

DEFINICIÓN. *El conjunto de todas las funciones primitivas* $F(x)$ *de la diferencial* $f(x)\,dx$ *se denomina integral indefinida* y *se designa* $\int f(x)\,dx$.

De esta manera, puede anotarse

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

donde $f(x)\,dx$ se llama *integrando*, y C, *constante de integración arbitraria* (a veces, la función $f(x)$ recibe el nombre de *función integrando*).

Por ejemplo, la expresión $x^2 + C$ es la *integral indefinida* de la diferencial $2x\,dx$ y se designa con el símbolo $\int 2x\,dx$, es decir,

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

El proceso de cálculo de la función primitiva se llama *integración*, y la parte de las matemáticas que se ocupa de

las cuestiones relacionadas con la integración, *cálculo integral.*

De lo dicho se deduce que **la integración es la operación inversa a la diferenciación.**

§ 105. Propiedades fundamentales de la integral indefinida.

Primera propiedad. *La diferencial de la integral indefinida es igual al integrando,* o sea,

$$d\int f(x)\ dx = f(x)\ dx.$$

Esta propiedad se deduce de la definición de la integral indefinida.

Segunda propiedad. *La integral indefinida de la diferencial de una función es igual a esta función más la constante de integración.*

Sea

$$dF(x) = f(x)\ dx.$$

Si integramos ambos miembros de esta igualdad, obtendremos:

$$\int dF(x) = \int f(x)\ dx.$$

pero, conforme a la definición

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C,$$

por consiguiente,

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Aceptemos sin demostración las siguientes propiedades de la integral indefinida.

Tercera propiedad. *Los factores constantes pueden sacarse del signo de la integral,* es decir,

$$\int af(x)\ dx = a\int f(x)\ dx,$$

donde a es un factor constante.

Cuarta propiedad. *La integral de la suma algebraica de varias funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de cada una de ellas*, o sea,

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)\ dx + \int f_2(x)\ dx - \int f_3(x)\, dx.$$

§ 106. Fórmulas fundamentales de integración. Para hallar la integral indefinida es necesario conocer las fórmulas fundamentales de integración.

Deduzcamos primero la fórmula para la integración de la potencia. Examinemos la función x^{n+1} y hallemos su diferencial:

$$d(x^{n+1}) = (n + 1)\, x^n\, dx.$$

Integrando ambos miembros de esta igualdad, obtendremos:

$$\int d(x^{n+1}) = \int (n + 1)\, x^n\, dx.$$

Aplicando la segunda propiedad de la integral al miembro izquierdo de la última igualdad, y la tercera, al derecho, hallaremos:

$$x^{n+1} + C_1 = (n + 1) \int x^n\, dx,$$

de aquí, cuando $n + 1 \neq 0$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + \frac{C_1}{n + 1}.$$

Designando con la letra C el sumando constante $\frac{C_1}{n+1}$, se tendrá definitivamente:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C.$$

La fórmula deducida se verifica para todo valor de n excepto $n = -1$. En este caso, la fórmula no tiene sentido.

Supongamos que sea necesario hallar $\int \frac{dx}{x}$. Preguntémonos qué función tendrá por diferencial la expresión $\frac{dx}{x}$. Esa función es $\ln x + C$, por cuanto

$$d(\ln x + C) = \frac{dx}{x}.$$

Sin embargo, la notación

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \qquad (1)$$

no es exacta. En efecto, la función integrando $\frac{1}{x}$ del miembro izquierdo está definida en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = 0$; mientras que la función $\ln x$ del miembro derecho carece de sentido si x es negativo. Así, pues, la fórmula (1) se verifica cuando $x > 0$. Sea ahora $x < 0$. Supongamos $-x = z$, entonces $z > 0$, y $dx = -dz$, $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{-z} = \frac{dz}{z}$. Por consiguiente, si $x < 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln(-x) + C^{*}). \qquad (2)$$

Uniendo las fórmulas (1) y (2), obtendremos definitivamente:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

De modo análogo, mediante la operación de inversión con las fórmulas de diferenciación, se obtendrán fácilmente las fórmulas inmediatas de integración. A continuación se ofrece la tabla de las fórmulas fundamentales.

Tabla de las fórmulas de integración

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \quad (I) \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C. \quad (VI)$$

si $n \neq -1$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \quad (II) \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad (VII)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \quad (III) \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \quad (VIII)$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (IV) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C. \quad (IX)$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C. \quad (V) \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C. \quad (X)$$

*) De hecho, aquí se ha empleado el método de integración por sustitución (véase a continuación el § 108).

Analicemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Hallar $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)\, dx$.

SOLUCIÓN. Aplicando las propiedades cuarta y tercera de la integral y, luego, la fórmula (I) y la segunda propiedad, obtendremos:

$$\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)\, dx = \int 5x^4\, dx - \int 4x^3\, dx +$$

$$+ \int 3x^2\, dx - \int dx = 5\int x^4\, dx - 4\int x^3\, dx + 3\int x^2\, dx -$$

$$- \int dx = 5\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - x + C = x^5 - x^4 + x^3 - x + C.$$

Aquí C es la suma algebraica de cuatro sumandos constantes arbitrarios, partes integrantes de cada integral.

Puede comprobarse fácilmente si la integración es correcta; para ello, hallemos la diferencial de la función obtenida como resultado:

$$d(x^5 - x^4 + x^3 - x + C) = (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)\, dx.$$

Se ha obtenido la expresión del integrando; por consiguiente, la integral hallada es correcta.

EJEMPLO 2. Hallar $\int \frac{2x\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUCIÓN. La integral dada no corresponde a ninguna de las fórmulas ofrecidas en la tabla; por este motivo transformaremos el integrando del modo siguiente:

$$\frac{2x\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[3]{x}} = 2x x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = 2x^{\frac{7}{6}}\, dx.$$

Aplicando la tercera propiedad y la fórmula (I), se tiene:

$$2\int x^{\frac{7}{6}} dx = 2\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + C = \frac{12}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C.$$

EJEMPLO 3. Hallar $\int \frac{x^2 + 1}{x}\, dx$.

SOLUCIÓN. Representemos la función integrando en forma de suma de dos funciones, dividiendo los términos del numerador por x:

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Entonces, la integral dada constituirá una suma de dos integrales; aplicando las fórmulas (I) y (II), obtendremos:

$$\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \int x\,dx + \int\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Hemos examinado ejemplos elementales en los que las funciones, después de sencillas transformaciones, han podido expresarse de forma que permitiera aplicar las fórmulas de la tabla para calcular la integral. Son muy frecuentes los casos en que no pueden llevarse a cabo dichas transformaciones, siendo necesario utilizar métodos especiales, a veces muy complejos, de integración.

Así, pues, para la integración no basta con conocer las fórmulas, se requiere, además, experiencia, acumulada gradualmente mediante el ejercicio en la solución de ejemplos. A diferencia de la diferenciación, la integración exige cierta inventiva y agudeza.

Ejercicios

1. $\int x\,dx$. 2. $\int x^4\,dx$. 3. $\int x^{n-1}\,dx$. 4. $\int 5\,dx$. 5. $\int a\,d\varphi$.

6. $\int 2x\,dx$. 7. $\int \frac{1}{2}t^2\,dt$. 8. $\int (2-x)\,dx$. 9. $\int (3x-x^2)\,dx$.

10. $\int (a+\varphi^2)\,d\varphi$. 11. $\int 3(x-2)\,dx$. 12. $\int (4x^3+4x-3)\,dx$.

13. $\int x^2(1+2x)\,dx$. 14. $\int (x+3)^2\,dx$. 15. $\int 4(2x-1)^2 dx$. 16. $\int x(1-x)^2\,dx$. 17. $\int \sqrt{x}\,dx$. 18. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$. 19. $\int \frac{d\omega}{\omega^2}$. 20. $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$. 21. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

22. $\int \frac{3\,dx}{4\sqrt[4]{x}}$. 23. $\int \frac{x\,dx}{2\sqrt{x}}$. 24. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x}\,dx$. 25. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^3}}$. 26. $\int\left(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$. 27. $\int \frac{2\sqrt{x}-3x^2}{x^2}\,dx$. 28. $\int \frac{v-\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{v}}\,dv$.

29. $\int 4 \operatorname{sen} x \, dx$. 30. $\int 2a \cos \varphi \, d\varphi$. 31. $\int \frac{2 \, d\theta}{\cos^2 \theta}$. 32. $\int \frac{3a \, du}{\operatorname{sen}^2 u}$.

33. $\int (1 + \cos t) \, dt$. 34. $\int (2 - 3 \operatorname{sen} x) \, dx$. 35. $\int (3x^2 - 2 \cos x) \, dx$.

36. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 \varphi} - \frac{3}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \right) d\varphi$. 37. $\int 3e^u \, du$. 38. $\int 2a^v d\varphi$. 39. $\int (x - 5e^x) \, dx$. 40. $\int (2e^t - 3 \cos t) \, dt$. 41. $\int \frac{3 \, dt}{2t}$. 42. $\int \left(\frac{2}{x} - x \right) dx$.

43. $\int \frac{6 \, dx}{1 + x^2}$. 44. $\int \frac{3 \, dx}{4\sqrt{1 - x^2}}$. 45. $\int \frac{2 \cos^2 v + 1}{\cos^2 v} \, dv$. 46. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 t - 2}{\operatorname{sen}^2 t} \, dt$.

47. $\int \frac{e^{2x} + e^x \operatorname{sen} x}{e^x} dx$. 48. $\int \sec^2 x \, dx$. 49. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$. 50. $\int \frac{x^2 \, dx}{x^2 + 1}$.

§ 107. Determinación de la constante de integración. En el § 104 se estableció que, en la igualdad

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

el sumando constante C tiene valor arbitrario y, por lo tanto, la integral indefinida representa un conjunto de funciones primitivas que se diferencian entre sí por un sumando constante. Para separar de este conjunto la función que responde al problema, se necesita una condición adicional.

Supongamos, por ejemplo, que se requiera hallar la ecuación de la curva pasa por el punto $M(1; 3)$ si se sabe que el coeficiente angular de la tangente trazada en un punto cualquiera de la misma es igual a $2x$.

De acuerdo con el concepto geométrico de la derivada (§ 66), anotaremos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

de donde

$$dy = 2x \, dx.$$

Integrando ambos miembros de la última igualdad, se tiene:

$$\int dy = \int 2x \, dx$$

o

$$y = x^2 + C \qquad (1)$$

La igualdad (1) no puede servir de respuesta al problema, pues contiene una constante indefinida C. Para hallar la respuesta concreta (o sea, la función primitiva única de la diferencial dada), emplearemos los datos complementarios del problema, a saber, las coordenadas del punto de la curva cuya ecuación se busca. Suponiendo en la ecuación (1) $x = 1$ e $y = 3$, se tiene:

$$3 = 1 + C,$$

de donde

$$C = 2.$$

Así, pues, la ecuación de nuestra curva (es decir, la función primitiva buscada que satisface los datos complementarios) será

$$y = x^2 + 2. \qquad (2)$$

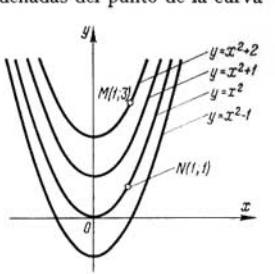


FIG. 117

Si construimos los gráficos de las funciones primitivas definidas por la ecuación (1), se obtiene un conjunto (una familia) de parábolas (fig. 117) con los vértices en el eje Oy. Al dar los datos adicionales ($x = 1$ e $y = 3$), separamos de este conjunto la parábola (2) en que se halla el punto con las coordenadas $x = 1$ e $y = 3$. En efecto, sustituyendo en la ecuación (2) x e y por 1 y 3, se obtiene una identidad.

Si se cambian los datos adicionales, cambiará también C y, correspondientemente, se obtendrá otra función primitiva cuyo gráfico será otra parábola de esa misma familia. Por ejemplo, si la curva pasa por el punto $N(1; 1)$, $C = 0$ e $y = x^2$ (fig. 117).

Ejercicios

1. Hallar $\int (x - 3)\, dx$, si cuando $x = 2$ la función primitiva es igual a 9.

2. Hallar $\int (\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx$, si cuando $x = \frac{\pi}{2}$ la función primitiva es igual a 2.

3. Hallar $\int \left(\frac{2}{x} - 1\right) dx$, si cuando $x = 1$ la función primitiva es igual a 2.

4. Hallar $\int \left(\frac{1}{2} e^x - \cos x\right) dx$, si cuando $x = 0$ la función primitiva es igual a $\frac{1}{2}$.

5. Hallar $\int \left(\frac{5}{1+x^2} + 1\right) dx$, si cuando $x = 0$ la función primitiva es igual a 0.

6. Hallar la ecuación de la línea que pasa por el punto $A(2; 1)$ y tiene la propiedad de que el coeficiente angular de la tangente trazada en cada punto de la misma es igual a la abscisa de este punto. Construir dicha línea.

7. Hallar la ecuación de la línea que pasa por el punto $A(1; 1)$, si el coeficiente angular de la tangente trazada en cada uno de sus puntos es igual al valor inverso de la abscisa del punto de tangencia.

8. La velocidad de un cuerpo viene dada por la ecuación $v = (6t^2 + 1)$ m/s. Hallar la ecuación del espacio S, si en el tiempo $t = 3$ s el cuerpo recorrió 60 m.

9. La velocidad de un punto viene dada por la ecuación $v = (t^2 - 6t + 7)$ m/s. Hallar la ecuación del movimiento, si en el instante en que empieza a contarse el tiempo el punto había recorrido el espacio $S = 4$ m.

10. La velocidad de un punto viene dada por la ecuación $v = 4 \cos t$ m/s. Hallar la ecuación del movimiento, si en el instante $t = \pi/6$ el punto se encuentra a la distancia $S = 8$ m del punto de origen del recorrido.

11. La velocidad de desplazamiento de un cuerpo crece proporcionalmente al tiempo. Hallar la ecuación del movimiento si en el momento inicial el recorrido $S = 0$ y, al cabo de $t = 5$ s, había recorrido $S = 15$ m.

12. La velocidad de desplazamiento de un cuerpo es proporcional al cuadrado del tiempo. Hallar la ecuación del movimiento si se sabe que en 3 s había recorrido 18 cm y en el instante inicial $S = 0$.

§ **108. Integración por sustitución.** I. Cuando, mediante las transformaciones elementales, es difícil o imposible llevar la integral dada a una de las formas ofrecidas en la tabla, se emplean procedimientos especiales para calcularla. Examinemos uno de ellos *), llamado *integración por sustitución*.

EJEMPLO 1. Hallar $\int (1+x)^5 dx$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$1 + x = z, \tag{1}$$

donde z es una nueva variable. Diferenciemos ambos miembros de la igualdad (1); obtendremos $dx = dz$. Sustituyendo, en la integral buscada, $1 + x$ y dx por sus valores hallados y aplicando la fórmula (I) (§ 106), hallaremos:

$$\int (1+x)^5 dx = \int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + C.$$

*) En el § 146 (págs. 397—399) se ofrece otro procedimiento (el denominado integración por partes).

Pero la respuesta debe darse en forma de función de la variable x; por esto, sustituyendo z por su valor de la igualdad (1), se tiene:

$$\int (1+x)^5\,dx = \frac{1}{6}(1+x)^6 + C.$$

Para verificar la solución, hallamos la diferencial de la expresión obtenida considerándola como función potencial de $(1+x)$:

$$d\left[\frac{1}{6}(1+x)^6 + C\right] = \frac{1}{6}\cdot 6(1+x)^5\,dx = (1+x)^5\,dx,$$

El resultado obtenido es la expresión del integrando; por consiguiente, la integración ha sido efectuada correctamente.

EJEMPLO 2. Hallar $\int \sqrt{2x+3}\,dx$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$2x+3 = z,$$

de donde $2\,dx = dz$ y $dx = \frac{dz}{2}$.

Sustituyendo en el integrando $2x+3$ y dx por sus valores y la raíz por la potencia con exponente fraccionario, y aplicando la fórmula (I) (§ 106), hallaremos:

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \int \sqrt{z}\cdot\frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{2}\,\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{z^3} + C.$$

Pasando a la variable anterior x, obtendremos:

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C.$$

EJEMPLO 3. Hallar $\int \operatorname{sen}(a+bx)\,dx$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$a+bx = z,$$

de donde

$$b\,dx = dz \quad y \quad dx = \frac{dz}{b}.$$

Haciendo la sustitución lo mismo que en el ejemplo anterior, y aplicando la fórmula (V) (§ 106), obtendremos:

$$\int \operatorname{sen}(a + bx)\,dx = \int \operatorname{sen} z \cdot \frac{dz}{b} = -\frac{1}{b}\cos z + C =$$

$$= -\frac{1}{b}\cos(a + bx) + C.$$

EJEMPLO 4. Hallar $\int \frac{x^2\,dx}{1 + x^3}$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$1 + x^3 = z,$$

de donde

$$3x^2\,dx = dz \quad \text{y} \quad x^2\,dx = \frac{dz}{3}.$$

Haciendo la sustitución requerida y aplicando la fórmula (II) (§ 106), obtendremos:

$$\int \frac{x^2\,dx}{1 + x^3} = \int \frac{\frac{dz}{3}}{z} = \frac{1}{3}\ln z + C = \frac{1}{3}\ln(1 + x^3) + C.$$

EJEMPLO 5. Hallar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$\operatorname{sen} x = z,$$

entonces

$$\cos x\,dx = dz$$

y

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \int z^2\,dz = \frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C.$$

EJEMPLO 6. Hallar $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{1 - \cos x}}$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$1 - \cos x = z;$$

entonces,

$$\operatorname{sen} x\,dx = dz$$

y

$$\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{1-\cos x}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int z^{-\frac{1}{2}}\, dz = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1-\cos x} + C.$$

EJEMPLO 7. Hallar $\int \frac{2e^x\, dx}{(1-e^x)^2}$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$1 - e^x = z;$$

entonces,

$$e^x\, dx = -dz$$

y

$$\int \frac{2e^x\, dx}{(1-e^x)^2} = \int \frac{-2\, dz}{z^2} = -2\int z^{-2}\, dz = -2 \cdot \frac{z^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{2}{z} + C = \frac{2}{1-e^x} + C.$$

EJEMPLO 8. Hallar $\int \frac{dx}{9+x^2}$.

SOLUCIÓN. La integral buscada se parece a la ofrecida en la tabla [(X), § 106]; por lo tanto, mediante las adecuadas transformaciones, se la reduce a la forma que permite aplicar esa fórmula. Para realizarlo, saquemos del signo de la integral el factor $\frac{1}{9}$.

Obtendremos:

$$\int \frac{dx^2}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}.$$

Supongamos ahora

$$\frac{x}{3} = z;$$

entonces,

$$dx = 3\, dz$$

y

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{3\,dz}{1+z^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} z + C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C.$$

EJEMPLO 9. Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

SOLUCIÓN. Esta integral se reduce a la de la tabla [(IX), § 106] mediante las siguientes transformaciones:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\left(1-\frac{5}{3}x^2\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{5}{3}x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x\right)^2}}.$$

Supongamos

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x = z;$$

entonces,

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}dx = dz,$$

de donde

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dz.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sen} z + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x + C,$$

o

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\ sen} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} x + C.$$

EJEMPLO 10. Hallar $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

SOLUCIÓN.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos x}.$$

Supongamos

$$\cos x = z;$$

entonces

$$\operatorname{sen} x\, dx = -dz$$

y

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int -\frac{dz}{z} = -\ln|z| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

EJEMPLO 11. Hallar $\int \cos^2 x\, dx$.

SOLUCIÓN. Sustituyamos $\cos^2 x$ por la fórmula

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

entonces

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx.$$

Para hallar $\int \cos 2x\, dx$, supongamos:

$$2x = z,$$

de donde

$$dx = \frac{1}{2} dz$$

y

$$\frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos z \cdot \frac{1}{2}\, dz = \frac{1}{4}\int \cos z\, dz =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} z + C = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

Por consiguiente,

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

EJEMPLO 12. Hallar $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$x = a \operatorname{sen} z, \tag{2}$$

entonces

$$dx = a \cos z\, dz$$

y

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 z} = a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z} = a \cos z.$$

Así, pues,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \cos z\, a \cos z\, dz = a^2 \int \cos^2 z\, dz.$$

Tomando $\int \cos^2 z\, dz$ del ejemplo 11, anotaremos:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2\left(\frac{1}{2}\, z + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2z\right) + C. \tag{3}$$

De la igualdad (2) hallaremos:

$$\operatorname{sen} z = \frac{x}{a},$$

de donde

$$z = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}.$$

Además,

$$\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z = 2 \operatorname{sen} z\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z} =$$

$$= 2\,\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Sustituyendo los valores de z y $\operatorname{sen} 2z$ en la igualdad (3), obtendremos:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Así, pues,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

II. En la práctica, frecuentemente se tropieza con integrales para cuyo cálculo pueden utilizarse las correspondientes fórmulas, ofrecidas en la tabla expuesta a continuación (para las constantes k y n), sin tener que recurrir a la solución detallada por el método de sustitución:

1) $\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C,$

2) $\int a^{kx}\, dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{\ln a} + C,$

3) $\int \operatorname{sen} kx\, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C,$

4) $\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k} \operatorname{sen} kx + C,$

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kx + C,$

6) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 kx} = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} kx + C,$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - n^2x^2}} = \frac{1}{n} \operatorname{arc\,sen} \frac{n}{k} x + C,$

8) $\int \frac{dx}{k^2 + n^2x^2} = \frac{1}{kn} \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{k} x + C.$

Todas estas fórmulas pueden deducirse fácilmente por sustitución, $kx = z$ [para las fórmulas 1) — 6)] y $\frac{n}{k} x = z$ [para las fórmulas 7) — 8)], de las fórmulas (III) — (X) del § 106, por los propios alumnos. Hagamos notar que si $k = 1$ y $n = 1$, las fórmulas 1) — 8) se convierten, respectivamente, en las fórmulas fundamentales (III) — (X) del § 106.

EJEMPLO 13. Hallar $\int \cos \frac{4}{5} x \, dx$.

SOLUCIÓN. Por la fórmula 4) se tiene

$$\int \cos \frac{4}{5} x \, dx = \frac{5}{4} \operatorname{sen} \frac{4}{5} x + C.$$

EJEMPLO 14. Hallar $\int \frac{dx}{25 + 8x^2}$.

SOLUCIÓN. Por la fórmula 8) obtendremos

$$\int \frac{dx}{25 + 8x^2} = \frac{1}{5 \cdot 2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{8}}{5} x + C = \frac{1}{10\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt{2}}{5} x + C.$$

Ejercicios

1. $\int (3 + 5x)^4 \, dx$. 2. $\int (a + bx)^m \, dx$. 3. $\int \frac{dx}{(3x + 1)^2}$. 4. $\int \sqrt{x + 2} \, dx$.

5. $\int \sqrt[3]{4x - 3} \, dx$. 6. $\int \sqrt[3]{(3x + 1)^2} \, dx$. 7. $\int \frac{3dx}{\sqrt[3]{3x + 5}}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2 - 3x)^2}}$.

9. $\int \frac{dx}{1 + 2x}$. 10. $\int \frac{2dx}{3 - 4x}$. 11. $\int \operatorname{sen} 2x \, dx$. 12. $\int \cos 4x \, dx$.

13. $\int \operatorname{sen} (1 - t) \, dt$. 14. $\int \cos \left(\frac{1}{2} \varphi + 2 \right) d\varphi$. 15. $\int \left(\cos \frac{x}{3} - \operatorname{sen} 3x \right) dx$.

16. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$. 17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x}$. 18. $\int \frac{dx}{\cos^2 (1 - 2x)}$. 19. $\int e^{2\varphi} \, d\varphi$.

20. $\int e^{-30} d\theta$. 21. $\int 2e^{-\frac{1}{2}\omega + 1} d\omega$. 22. $\int \frac{dx}{2e^x}$. 23. $\int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$.

24. $\int 3^{-t+2} \, dt$. 25. $\int \frac{2x \, dx}{1 + x^2}$. 26. $\int \frac{2t \, dt}{(2t^2 - 1)^2}$. 27. $\int \frac{3v^2 \, dv}{(2 - v^3)^4}$.

28. $\int \frac{t \, dt}{\sqrt{1 - t^2}}$. 29. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{2x^3 - 1}}$. 30. $\int x \sqrt{x^2 + 1} \, dx$. 31. $\int t^2 \sqrt{1 + 2t^3} \, dt$.

32. $\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \operatorname{sen} x}$. 33. $\int \frac{\operatorname{sen} \varphi \, d\varphi}{2 - 3 \cos \varphi}$. 34. $\int \frac{\operatorname{sen} t \, dt}{\cos^2 t}$. 35. $\int \frac{\cos \omega \, d\omega}{\operatorname{sen}^4 \omega}$.

36. $\int \frac{\cos x \, dx}{(2 - \operatorname{sen} x)^2}$. 37. $\int \frac{\cos t \, dt}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} t}}$. 38. $\int \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \, dx$.

39. $\int \operatorname{sen}^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi$. 40. $\int \sqrt{\cos \theta} \operatorname{sen} \theta \, d\theta$. 41. $\int \cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha)^2 \, d\alpha$.

42. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x^3 \, dx$. 43. $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx$. 44. $\int \operatorname{ctg} x \, dx$. 45. $\int \frac{e^x \, dx}{1 + e^x}$.

46. $\int \frac{2e^x \, dx}{(2 + e^x)^2}$. 47. $\int e^x \sqrt{1 + e^x} \, dx$. 48. $\int \frac{e^u \, du}{\sqrt{2 + e^u}}$. 49. $\int x e^{x^2} \, dx$.

50. $\int \frac{\cos 2x \, dx}{1 + \operatorname{sen} 2x}$. 51. $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$. 52. $\int \frac{dx}{4 + x^2}$. 53. $\int \frac{dx}{2 + x^2}$.

54. $\int \frac{dt}{5 + 4t^2}$. 55. $\int \frac{dt}{\sqrt{1 - 4t^2}}$. 56. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$. 57. $\int \frac{dt}{\sqrt{9 - 4t^2}}$.

58. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{3 - 4\theta^2}}$. 59. $\int \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}}$. 60. $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x} \, dx$.

61. $\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$. 62. $\int \operatorname{tg} 2x \, dx$. 63. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 1} \, dx$. 64. $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$.

65. $\int \frac{\ln x \, dx}{x}$. 66. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} \, dx$. 67. $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$. 68. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

69. $\int \frac{x \, dx}{1 + x}$. 70. $\int \frac{\sqrt{x} \, dx}{1 + x}$. 71. $\int \sqrt{1 + \cos x} \, dx$. 72. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$.

§ **109. Integral definida.** Si en la integral

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

el argumento varía de $x = 2$ a $x = 4$, el incremento de las funciones primitivas $x^2 + C$, en el intervalo indicado de valores de x, será:

$$4^2 + C - (2^2 + C) = 16 - 4 = 12.$$

Este incremento de las funciones primitivas recibe el nombre de *integral definida* y se designa con el símbolo $\int_2^4 2x \, dx$.

DEFINICIÓN. *El incremento $F(b) - F(a)$ de cualquiera de las funciones primitivas $F(x) + C$, cuando el argumento varía de $x = a$ a $x = b$, se denomina integral definida y se designa* $\int_a^b f(x) \, dx$.

Además, se presupone que la función $f(x)$ es continua en el intervalo de valores del argumento de a a b.

Así, pues,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

El miembro izquierdo de esta igualdad se lee: "integral definida de a a b f de $x\,dx$".

El valor de a se llama *límite inferior de la integral definida*, y el de b, *límite superior*.

De la igualdad (1) se deduce la siguiente regla:

Para calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ *es necesario hallar la correspondiente integral indefinida, en su expresión obtenida sustituir en vez de x, primero, el límite superior de la integral definida y, luego, el inferior, y del primer resultado restar el segundo.*

Para remarcar las dos operaciones de cálculo de la integral definida – cálculo de la integral indefinida y sustitución de los límites – , la fórmula (1) se anota del siguiente modo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

EJEMPLO 1. Calcular $\int_{-1}^{+1} (x^2+1)\,dx$.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la regla se tiene:

$$\int_{-1}^{+1} (x^2+1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{+1} = \left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = 2\frac{2}{3}.$$

EJEMPLO 2. Calcular $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos x\,dx$.

SOLUCIÓN.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos x \, dx = 4 \operatorname{sen} x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 4(1 - 0{,}865) = 4 \cdot 0{,}135 = 0{,}54.$$

EJEMPLO 3. Calcular $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$.

SOLUCIÓN.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} 1 =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \approx 0{,}262.$$

§ 110. Propiedades fundamentales de la integral definida. En el § 105 hemos examinado las cuatro propiedades fundamentales de la integral indefinida. En los cursos detallados de matemáticas superiores se demuestra que la tercera y la cuarta se verifican también para la integral definida. Además de estas dos se verifica la siguiente:

Si se invierten los límites de la integral definida, su signo cambia por el contrario.

En efecto, sacando fuera de paréntesis el factor -1 del miembro derecho de la igualdad

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a),$$

obtendremos:

$$\int_a^b f(x) \, dx = -[F(a) - F(b)].$$

Pero la diferencia entre corchetes es esa misma integral definida con los límites invertidos, es decir,

$$\int_b^a f(x)\,dx.$$

Por consiguiente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ejercicios

Calcular las integrales definidas:

1. $\int_1^2 x\,dx$. 2. $\int_0^3 x^2\,dx$. 3. $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^3\,dx$. 4. $\int_0^1 (2x+1)\,dx$. 5. $\int_{-1}^0 (3x^2+1)\,dx$.

6. $\int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2}t + 4t^2\right) dt$. 7. $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 3(u^2+1)\,du$. 8. $\int_1^2 2\pi(1+x^2)\,dx$.

9. $\int_0^a (x^2 - ax)\,dx$. 10. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2}$. 11. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$. 12. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$. 13. $\int_1^8 4\sqrt[3]{x}\,dx$.

14. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. 15. $\int_1^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$. 16. $\int_1^4 \left(3x^2 - 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$.

17. $\int_1^2 \frac{2dx}{5x}$. 18. $\int_2^8 \frac{2+x}{x^2}\,dx$. 19. $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}\,dx$. 20. $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$.

21. $\int_{-1}^{+1} \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) dx$. 22. $\int_1^8 \frac{0 - \sqrt[3]{\theta}}{\theta}\,d\theta$. 23. $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x^2}\,dx$.

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi$. 25. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi$. 26. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{\cos^2 t}$. 27. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$.

28. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\cos t\,dt$. 29. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{3}{4}\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta$. 30. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi$.

31. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \operatorname{sen} x\right) dx$. 32. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$. 33. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \right.$

$\left. + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$. 34. $\int_{0}^{\pi} (e^x - \cos x)\,dx$. 35. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\cos x + 1}{x}\,dx$. 36. $\int_{0}^{0,5} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

37. $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{3\,dx}{1+x^2}$. 38. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}$.

§ 111. Aplicación del método de sustitución para el cálculo de la integral definida. Para calcular la integral definida por el método de sustitución, se opera del mismo modo que en los ejemplos examinados del § 108. Pero existe una peculiaridad en la que debe fijarse la atención.

Como ya se ha señalado, el citado método consiste en reducir la integral indefinida a la forma tabular, expresando el argumento con una nueva variable, hallar luego la integral indefinida y expresar el resultado obtenido con la primera variable (argumento). Si la integral es definida, no hay necesidad de volver a la variable inicial dada.

Estudiemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{5x\,dx}{(1-x^2)^3}.$$

SOLUCIÓN. Supongamos

$$1 - x^2 = z; \qquad (1)$$

entonces

$$-2x\,dx = dz,$$

de donde

$$x\,dx = -\frac{dz}{2}.$$

Como se ha introducido una nueva variable relacionada con la anterior por la igualdad (1), los límites de variación de la variable z, o sea, los límites de integración para la variable z serán otros. Se hallarán por la igualdad (1) mediante la sustitución del argumento x por sus valores 0 y $\frac{1}{2}$. Hecha esta sustitución, obtendremos:

$$z_i = 1 - 0 \quad \text{(límite inferior)}$$

$$z_s = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad \text{(límite superior)}.$$

De esta manera, hemos establecido que a los límites de variación de 0 a $\frac{1}{2}$ de x les corresponden los límites de variación de 1 a $\frac{3}{4}$ de la nueva variable z. Sustituyendo, en la integral dada, $1 - x^2$ y $x\,dx$ por sus expresiones con la nueva variable y cambiando correspondientemente los límites de integración, podemos anotar la solución de nuestro ejemplo así:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x\,dx}{(1-x^2)^3} = \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{5\left(-\frac{dz}{2}\right)}{z^3} = -\frac{5}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dz}{z^3} = -\frac{5}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} z^{-3}\,dz =$$

$$= -\frac{5}{2}\,\frac{z^{-2}}{-2}\Bigg|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}\,\frac{1}{z^2}\Bigg|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\frac{9}{16}} - 1\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{16}{9} - 1\right) = \frac{35}{36}.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3\,dx}{9 + 16x^2}$.

SOLUCIÓN.. Saquemos el factor $\frac{3}{9}$ fuera del signo de la integral:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3\,dx}{9+16x^2} = \frac{3}{9}\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+\frac{16}{9}x^2} = \frac{1}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+\left(\frac{4}{3}x\right)^2}.$$

Supongamos

$$\frac{4}{3}x = z; \qquad (2)$$

entonces $\frac{4}{3}dx = dz$, de donde $dx = \frac{3}{4}dz$.

Hallamos los nuevos límites:

$$z_1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad z_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4} = 1.$$

Por consiguiente:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3\,dx}{9+16x^2} = \frac{1}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{\frac{3}{4}\,dz}{1+z^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} z \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{48}.$$

Ejercicios

Calcular las integrales definidas:

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$.
2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$.
3. $\int_{-2}^{+2} (1-x)^3\,dx$.
4. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^3}$.
5. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.
6. $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.
7. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,dx$.
8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x\,dx$.
9. $\int_0^1 \cos\frac{2\pi t}{T}\,dt$.

10. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx$. **11.** $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$. **12.** $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{2\,dx}{3\cos^2 3x}$. **13.** $\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

14. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{2\sqrt{1+x^2}}$. **15.** $\int_{0}^{3} \frac{2x\,dx}{\sqrt{16+x^2}}$. **16.** $\int_{-1}^{+1} \frac{x^2\,dx}{3+2x^3}$.

17. $\int_{-1}^{2} \frac{2x\,dx}{(2x^2+1)^2}$. **18.** $\int_{0}^{1} \frac{6x^2\,dx}{1+2x^3}$. **19.** $\int_{-5}^{9} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+144}}$. **20.** $\int_{2}^{4} \frac{15x\,dx}{(x^2-1)^3}$.

21. $\int_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2-7}\,dx$. **22.** $\int_{1}^{2} (x^2-1)^3\,x dx$. **23.** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x dx}{(1-\cos x)^2}$.

24. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\operatorname{sen} x}$. **25.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^3 x}$. **26.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^4 x}$.

27. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \operatorname{sen} x dx$. **28.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4\operatorname{sen}^3 x \cos x dx$. **29.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos^2 x dx$.

30. $\int_{0}^{1} \frac{e^x dx}{e^x+5}$. **31.** $\int_{0}^{0,4} \frac{5\,dx}{4+25x^2}$. **32.** $\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **33.** $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2}$.

34. $\int_{1,5}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. **35.** $\int_{0}^{\sqrt{a}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **36.** $\int_{1}^{5} x\sqrt{x-1}\,dx$.

37. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$. **38.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. **39.** $\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{1+x^4}$.

40. $\int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

§ 112. Concepto geométrico de la integral definida. Sea dada una curva definida por la ecuación $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una función continua y positiva para los valores de x examinados (fig. 118). Tomemos en la curva el punto M_0 con la abscisa constante $OP_0 = a$ y el punto M que varía su posición en dependencia de la variación de la abscisa $OP = x$. Entonces, el área de la figura M_0MPP_0, llamada trapecio curvilíneo, será una variable dependiente de x. Designémosla con S. Demos al argumento x el incremento $PP_1 = \Delta x$; entonces, el área S recibirá el incremento ΔS igual al área de la figura curvilínea MM_1P_1P. Trazando la recta $MQ \| Ox$, y la $M_1N \| Ox$ hasta la intersección con la ordenada prolongada PM, obtendremos:

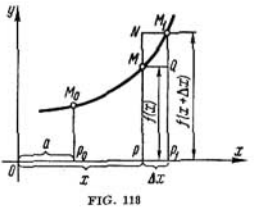


FIG. 118

$$\text{área } MQP_1P < \Delta S < \text{área } NM_1P_1P,$$

o, expresando las area de los rectángulos por las fórmulas,

$$PM \cdot PP_1 < \Delta S < P_1M_1 \cdot PP_1. \qquad (1)$$

Pero

$$PP_1 = \Delta x,$$
$$PM = f(x),$$
$$P_1M_1 = f(x + \Delta x);$$

por lo que la inecuación (1) se transcribirá así:

$$f(x)\,\Delta x < \Delta S < f(x + \Delta x)\,\Delta x.$$

Dividiendo estas inecuaciones por la magnitud positiva Δx, obtendremos:

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

Si $\Delta x \to 0$, $f(x + \Delta x) \to f(x)$. Puesto que la magnitud $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ está comprendida entre $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$, como se evidencia de la inecuación (2), con más razón

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x),$$

o sea,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Pero $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}$ es la derivada de la función S; por consiguiente,

$$\frac{dS}{dx} = f(x),$$

de donde

$$dS = f(x)\, dx. \tag{3}$$

Integrando ambos miembros de la igualdad (3), se tiene:

$$\int dS = \int f(x)\, dx,$$

o

$$S + C_1 = \int f(x)\, dx. \tag{4}$$

Si $F(x)$ es la función primitiva para la diferencial $f(x)\, dx$, entonces

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C_2. \tag{5}$$

Comparando las igualdades (4) y (5), se tiene:

$$S + C_1 = F(x) + C_2$$

ó

$$S = F(x) + C, \tag{6}$$

donde

$$C = C_2 - C_1.$$

Para hallar C, supongamos $x = a$ en la igualdad (6), entonces, como evidencia la fig. 118,

$$\text{área } M_0MPP_0 = S = 0;$$

tendremos:

$$0 = F(a) + C.$$

De aquí $C = -F(a)$ y la igualdad (6) se anotará:

$$S = F(x) - F(a).$$

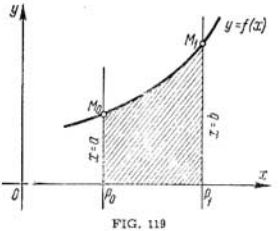


FIG. 119

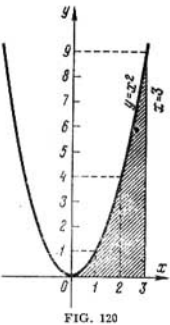


FIG. 120

Pero conforme a la definición (§ 109)

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Por consiguiente,

$$S = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a). \tag{7}$$

Esta fórmula expresa el área variable M_0MPP_0.

Para obtener el área constante $M_0M_1P_1P_0$ en el intervalo de valores de x de a a b (fig. 119), hay que suponer $x = b$ en la igualdad (7); entonces el área

$$M_0M_1P_1P_0 = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Así, pues, *el área de la figura limitada por la curva* $y = f(x)$, *donde* $f(x) > 0$, *el eje* Ox *y dos rectas* $x = a$ *y* $x = b$ *se expresa por la integral definida* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Tal es el concepto geométrico de la integral definida.

EJEMPLO. Determinar el área de la figura comprendida entre la rama de la curva $y = x^2$, el eje Ox y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ (en la fig. 120, está rayada).

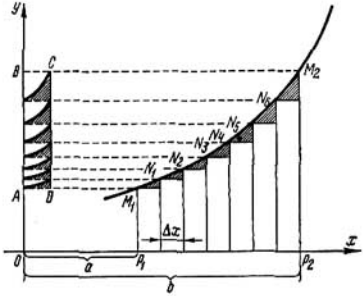


FIG. 121

SOLUCIÓN. El área buscada (fig. 120):

$$s = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9.$$

§ 113. La integral definida, como límite de la suma. Tomemos la función $y = f(x)$, continua en el intervalo de valores de x de a a b. Para simplificar, supongamos que esta función es positiva y creciente en el intervalo indicado.

Examinemos el área de la figura $M_1M_2P_2P_1$ limitada por el arco M_1M_2 del gráfico de la función dada, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje Ox (fig. 121). Esta área (§ 112)

$$s = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Dividamos el segmento P_1P_2 en n partes iguales, designemos cada una de ellas con Δx y, en los extremos de los segmentos obtenidos, levantemos perpendiculares hasta su intersección con la curva. Si desde los extremos de estas perpendiculares trazamos rectas paralelas al eje Ox, el área de la figura $M_1M_2P_2P_1$ quedará representada en forma de suma de áreas de rectángulos y la de triángulos curvilíneos. Designando la primera suma con S_1 y la segunda con S_2, anotaremos:

$$S = S_1 + S_2,$$

de donde

$$S - S_1 = S_2. \tag{2}$$

Si

$$OP_1 = a \text{ y } OP_2 = b,$$

entonces

$$P_1M_1 = f(a) \text{ y } P_2M_2 = f(b).$$

Sean las abscisas de los puntos N_1, N_2. N_3, ..., N_{n-1}, respectivamente,

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1},$$

entonces las ordenadas de estos puntos serán

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots, f(x_{n-1}).$$

La suma de las áreas de todos los rectángulos es:

$$S_1 = f(a)\ \Delta x + f(x_1)\ \Delta x + f(x_2)\ \Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\ \Delta x;$$

convengamos emplear la notación siguiente para esta suma:

$$S_1 = \sum_a^b f(x)\ \Delta dx, \tag{3}$$

donde Σ (sigma) es el símbolo de adición aceptado en matemáticas.

Si se aumenta infinitamente el número n de divisiones del segmento P_1P_2, $\Delta x \to 0$ y las magnitudes S_1 y S_2 se convertirán en variables. Demostremos que, en este caso, S_2 es una infinitesimal. Para ello, desplacemos los triángulos curvilíneos paralelamente al eje Ox, situándolos en el rectángulo $ABCD$ cuya base

$$AD = \Delta x$$

y cuya altura

$$AB = P_2M_2 - P_1M_1 = f(b) - f(a).$$

El área del rectángulo $ABCD$ será igual a

$$|\, f(b) - f(a)\,|\ \Delta x.$$

Como se ve en la fig. 121,

$$S_2 < [f(b) - f(a)]\ \Delta x. \tag{4}$$

Si $\Delta x \to 0$, $[f(b) - f(a)]\,\Delta x$, como producto de una constante por un infinitésimo es una infinitesimal y, por lo tanto, de acuerdo con la desiguldad (4) S_2 es también una infinitesimal.

De este modo, el miembro izquierdo de la igualdad (2) es la diferencia entre la constante S y la variable S_1, y el derecho, una infinitesimal. Por consiguiente, conforme a la definición del límite (§ 43)

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} S_1,$$

o, de acuerdo con las igualdades (1) y (3)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

La suma anotada dentro del signo del límite en la igualdad (5) se llama *suma integral*.

Así, pues, *la integral definida con límites finitos es igual al límite de la suma integral cuyo número de sumandos crece indefinidamente, tendiendo cada uno a cero.*

Se puede demostrar que arribaremos a ese mismo resultado si se toma una función positiva y decreciente en el intervalo dado de valores de x, o positiva y creciente en unas partes y decreciente en otras, o negativa, es decir, una función cuyo gráfico está situado debajo del eje Ox.

La conclusión obtenida evidencia que la integración puede considerarse como un proceso de adición, o sea, de determinación del todo mediante la adición de sus partes. A esto se debe el nombre de integral (del latín *integer*, entero) y su símbolo (la letra S alargada, con la que habitualmente se designa la suma).

En el capítulo XII, nos detendremos detalladamente en la aplicación de la fórmula (5).

Capítulo XII
Aplicaciones de la integral

§ **114. Areas de figuras.** En el § 112 hemos demostrado que si $f(x) > 0$ en el intervalo de valores de x desde a hasta b, el área de la figura comprendida entre el gráfico de la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$ y $x = b$ se determina por la fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (1)$$

Puede demostrarse que si $f(x) < 0$, la fórmula (1) da un número negativo cuyo valor absoluto expresa el área buscada, o sea,

$$S = \left| \int_a^b f(x)\, dx. \right| \qquad (2)$$

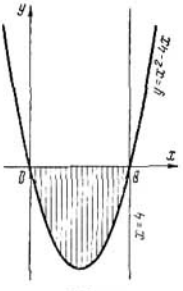


FIG. 122

EJEMPLO 1. Hallar el área de la figura comprendida entre el eje Ox y la curva $y = x^2 - 4x$ (fig. 122).

SOLUCIÓN. Los puntos O y B de interseccion de la parábola $y = x^2 - 4x$ con el eje Ox tienen las abscisas iguales a 0 y 4. Como muestra la figura 122, el área buscada (está rayada) tiene por límites: arriba, el eje Ox; abajo, la parábola; a la izquierda, la recta $x = 0$, y a la derecha, la recta $x = 4$, en estas rectas la parábola y el eje Ox cortan segmentos de longitud nula. La función dada es negativa en el intervalo de valores de x desde 0 hasta 4; por eso, aplicando la formula (2), obtendremos:

$$S = \left| \int_0^4 (x^2 - 4x)\, dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_0^4 \right| =$$

$$= \left| \frac{64}{3} - 32 \right| = \left| -10\,\frac{2}{3} \right| = 10\,\frac{2}{3}.$$

EJEMPLO 2. Hallar el área de la figura comprendida entre la curva $y = x^3$, las rectas $x = -1$ y $x = 2$, y el eje Ox (fig. 123).

SOLUCIÓN. Como evidencia la figura, el área buscada consta de dos áreas AOD y BOC, situadas a ambos lados del eje Ox.

En el intervalo de valores de x desde 0 hasta 2, la función $y = x^3$ es positiva y, por lo tanto, el área AOD se calcula por la fórmula (1)

$$S_{AOD} = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} = 4.$$

En el intervalo de valores de x desde -1 hasta 0, la función $y = x^3$ es negativa, por eso, conforme a la fórmula (2), tenemos:

$$S_{BOC} = \left| \int_{-1}^0 x^3 dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}.$$

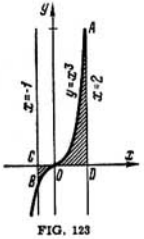


FIG. 123

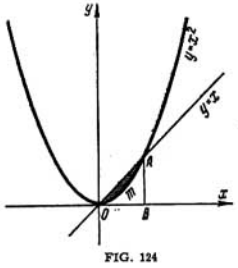


FIG. 124

De este modo, toda el área buscada

$$S = S_{AOD} + S_{BOC} = 4\frac{1}{4}.$$

EJEMPLO 3. Hallar el área de la figura comprendida entre las líneas $y = x^2$ e $y = x$ (fig. 124).

SOLUCIÓN. Las líneas dadas se cortan en el origen de coordenadas y en el punto $A(1; 1)$ (las coordenadas de los puntos de intersección se hallan resolviendo conjuntamente las ecuaciones de ambas líneas). Desde el punto A, bajemos la línea AB perpendicular al eje Ox. Esta línea es un segmento de la recta $x = 1$. El área buscada (fig. 124) es igual a la diferencia entre las áreas del triángulo OAB y la figura $OmAB$, es decir,

$$S_{OmA} = S_{OAB} - S_{OmAB}. \qquad (3)$$

El área de OAB está comprendida entre el gráfico de la función $y = x$, las rectas $x = 0$ y $x = 1$, y el eje Ox.

El área de $OmAB$ está comprendida entre la curva $y = x^2$, las rectas $x = 0$ y $x = 1$, y el eje Ox. Las funciones $y = x$ e $y = x^2$ son positivas en el intervalo de valores de x desde 0 hasta 1. Por consiguiente, conforme a la fórmula (1) y tomando en consideración la igualdad (3), se tiene:

$$S_{OmA} = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ejercicios

1. Hallar el área de la figura limitada por las rectas $y = 5x$, $x = 2$ y el eje Ox.

2. Hallar el área de la figura comprendida entre las rectas $y = 4x - 5$, $x = -3$, $x = -2$ y el eje Ox.

3. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = 2x^2$, el eje Ox y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

4. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y^2 = 9x$ y las rectas $x = 1$ y $x = 9$.

5. En la curva $y^2 = 4x$ se da un punto con la ordenada igual a 6. Hallar el área de la figura comprendida entre dicha curva, el eje Oy y la recta $y = 6$.

6. Hallar el área de la figura comprendida entre la curva $y = x^2 - x$, el eje Ox y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

7. Se da la curva $y = 2x^2 - x + 2$. Hallar el área de la figura comprendida entre esta curva, los ejes de coordenadas y la recta $x = 3$.

8. Determinar el área de un segmento parabólico de base $a = 6$ y altura $h = 8$.

9. Hallar el área de la figura limitada por el eje Ox y las líneas:

1) $y = 2x - x^2$, 2) $y = 9 - x^2$ y 3) $y = x^2 - 5x + 4$.

10. Hallar el área limitada por una onda de la sinusoide y el eje Ox.

11. Hallar el área de la figura limitada por los ejes de coordenadas y la curva $y = 4(1 - x^3)$.

12. Hallar el área comprendida entre las líneas:

1) $y = 2x - x^2$ e $y = x$,

2) $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = 4 - x$,

3) $x^2 - 9y = 0$ y $x - 3y + 6 = 0$,

4) $4y - x^3 = 0$ e $y - x = 0$.

13. Hallar el área comprendida entre las siguientes curvas:

1) $y^2 = x$ e $y = x^2$,

2) $y = x^2$ e $y = 1 - x^2$,

3) $4x^2 - 9y + 18 = 0$ y $2x^2 - 9y + 36 = 0$,

4) $x^2 + y^2 = 8$ e $y^2 = 2x$.

§ 115. Volumen de cuerpos.

Volumen del prisma. Como sabemos por las matemáticas elementales, el volumen del prisma recto se determina por la fórmula

$$V = aH,$$

donde a es el área de la base del prisma, y H, su altura. Deduzcamos la fórmula del volumen del prisma oblicuo.

Tomemos el prisma oblicuo representado en la figura 125. Sea el área de su base igual a a, y la altura $O_1O_2 = H$. Dividamos su altura en n partes y, por los puntos de división, tracemos planos paralelos a la base. De esta forma hemos dividido el prisma en placas. Aumentemos infinitamente el número de divisiones de la altura; entonces, el espesor de cada placa será una magnitud infinitesimal y las placas pueden tomarse por prismas rectos. Separemos uno de ellos, el $bcdefb_1c_1d_1e_1f_1$, por ejemplo. Su volumen es $\Delta V = a\ \Delta H$, donde ΔH es la altura del prisma elemental, y a, el área de

su base. Hemos dicho que $n \to \infty$; en este caso, $\Delta H \to 0$ y, por consiguiente, $a\ \Delta H \to 0$. Así, pues, el volumen del prisma será igual al límite de la suma de infinitesimales del tipo $a\ \Delta H$, o sea,

$$V = \lim_{\Delta H \to 0} \sum_{0}^{H} a \Delta H,$$

o, de acuerdo con la fórmula (5) (§ 113).

$$V = \lim_{\Delta H \to 0} \sum_{0}^{H} a \Delta H = \int_{0}^{H} a\ dH = a \int_{0}^{H} dH = aH.$$

El resultado obtenido nos da la misma fórmula para el volumen del prisma oblicuo que la del recto.

Así, pues, *el volumen de todo prisma es igual al producto del área de la base por la altura.*

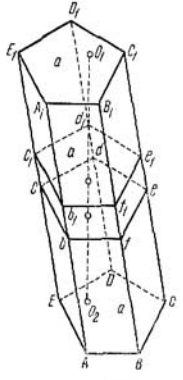


FIG. 125

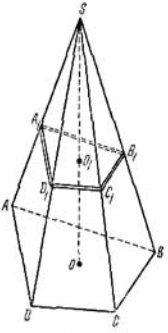


FIG. 126

El volumen del cilindro oblicuo se halla de forma análoga.

Volumen de la pirámide. Tomemos una pirámide, la superficie de cuya base sea Q y la altura, H, y dividámosla en n placas trazando planos paralelos a la base (fig. 126). Si se

aumenta infinitamente el número de estas placas, el espesor de cada una de ellas se convertirá en una magnitud infinitesimal; en este caso, las placas pueden tomarse por prismas. Separemos uno de ellos, la $A_1B_1C_1D_1$, por ejemplo, y designemos la superficie de su base, la altura y el volumen con q, Δy y Δv, respectivamente; entonces

$$\Delta v = q\Delta y. \qquad (1)$$

Como el área de la base de la placa depende de la distancia $OO_1 = y$, expresemos q por y. De acuerdo con el teorema de la propiedad de la sección paralela a la base de la pirámide, podemos anotar:

$$\frac{q}{Q} = \frac{(H-y)^2}{H^2},$$

de donde

$$q = \frac{Q}{H^2}(H-y)^2.$$

Ahora, la igualdad (1) se transcribirá así:

$$\Delta v = \frac{Q}{H^2}(H-y)^2\Delta y.$$

La magnitud Δv es una infinitesimal, por cuanto $\Delta y \to 0$ cuando $n \to \infty$; de este modo, el volumen v de la pirámide se expresará por el límite de la suma de infinitesimales del tipo $\frac{Q}{H^2}(H-y)^2\Delta y$, o sea,

$$v = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_0^H \frac{Q}{H^2}(H-y)^2\Delta y,$$

o, según la fórmula (5) (§ 113),

$$v = \int_0^H \frac{Q}{H^2}(H-y)^2\,dy.$$

Integrando por las regalas conocidas, hallamos:

$$v = \frac{Q}{H^2}\int_0^H (H^2 - 2Hy + y^2)\,dy = \frac{Q}{H^2}\left[H^2y - Hy^2 + \frac{y^3}{3}\right]\Big|_0^H =$$

$$= \frac{Q}{H^2}\left(H^3 - H^3 + \frac{H^3}{3}\right) = \frac{1}{3}QH.$$

Así, pues,

$$v = \frac{1}{3}QH,$$

es decir, *el volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto de la superficie de su base por la altura.*

§ 116. Volumen de un cuerpo de revolución. Supongamos dada una curva definida por la ecuación $y = f(x)$ y dos puntos A y B en ella con las abscisas $OP = a$ y $OQ = b$ (fig. 127). Si hacemos girar la figura $ABQP$ alrededor del eje Ox, se forma cierto cuerpo de revolución.

Dividamos el segmento PQ en n partes iguales, designemos con Δx cada una de ellas, y, en los puntos de división

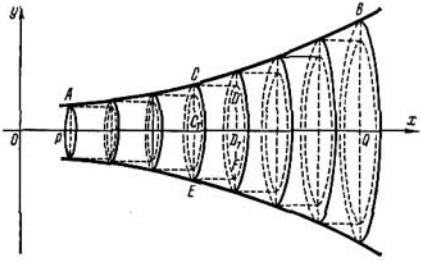


FIG. 127

elevemos perpendiculares al eje Ox hasta la intersección con la curva. Trazando, desde los puntos de intersección, rectas paralelas al eje Ox hasta que incidan en las perpendiculares vecinas, la figura $ABQP$ quedará dividida en n rectángulos y triángulos curvilíneos. Cuando la figura $ABQP$ gira alrededor

del eje Ox, cada uno de los rectángulos forma un cilindro, y la suma de los volúmenes de estos cilindros será el valor aproximado del volumen del cuerpo de revolución a que nos referimos. Calculemos dicha suma. Para ello, tomemos uno de los cilindros, el $CDFE$, por ejemplo. Como se ve en la figura 127, el radio de su base será

$$C_1C = y = f(x)$$

y la altura

$$C_1D_1 = \Delta x.$$

Por consiguiente, el volumen de nuestro cilindro es igual a

$$\pi y^2 \Delta x$$

y la suma de los volúmenes de todos los cilindros será

$$\sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

Precisamente esta expresión representa la magnitud aproximada del volumen del cuerpo de revolución, o sea,

$$v \approx \sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

Supongamos ahora que el número de divisiones del segmento PQ crece infinitamente; entonces, Δx y, por consiguiente, el producto $\pi y^2 \Delta x$ serán infinitesimales.

Pasando al límite, obtendremos

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \pi y^2 \Delta x,$$

o, de acuerdo con la fórmula (5) (§ 113),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \pi y^2 \Delta x = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Por ello,

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (1)$$

EJEMPLO. La figura limitada por las líneas $y^2 = 4x$, $x = 0$ $x = 4$ e $y = 0$ gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo obtenido (fig. 128).

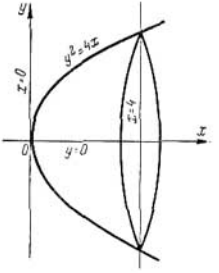


FIG. 128

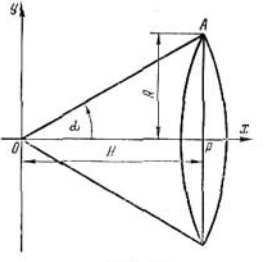


FIG. 129

SOLUCIÓN. El cuerpo obtenido recibe el nombre de paraboloide de revolución. De acuerdo con la fórmula (1) se tiene:

$$v = \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 4x dx = \pi \cdot 2x^2 \Big|_0^4 = \pi \cdot 2 \cdot 4^2 = 32\pi.$$

Utilizando la fórmula (1), se pueden deducir las fórmulas del volumen del cono, la esfera y sus partes.

Volumen del cono circular recto. El cono circular recto se obtiene haciendo girar el triángulo rectángulo OAP alrededor del eje Ox (fig. 129).

Hallemos la ecuación de la recta OA que, al girar, forma una superficie cónica.

Designando

$$OP = H, \quad PA = R,$$

escribamos la ecuación de la recta OA:

$$y = kx = \operatorname{tg} \alpha \cdot x = \frac{PA}{OP} x = \frac{R}{H} x.$$

Aplicando la fórmula (1), tendremos:

$$v = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H} x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3}\Big|_0^H =$$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

$$v = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \qquad (2)$$

Volumen del cono truncado. El cono truncado puede obtenerse haciendo girar el trapecio rectángulo $ABCO$ alrededor del eje Ox (fig. 130). Hallemos la ecuación de la recta AB que forma la superficie cónica. Para ello, supongamos

$$OA = r, \quad CB = R, \quad OC = H$$

y escribamos la ecuación de AB en la forma $y = kx + b$.

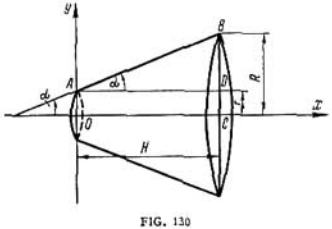


FIG. 130

Como muestra la fig. 130

$$b = r, \quad k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{R - r}{H}.$$

De este modo, la ecuación buscada será:

$$y = \frac{R - r}{H} x + r.$$

De acuerdo con la fórmula (1) hallaremos:

$$v = \pi \int_0^H \left(\frac{R-r}{H} x + r \right)^2 dx.$$

Calculemos la integral definida, aplicando el método de sustitución.

Supongamos

$$z = \frac{R-r}{H} x + r,$$

entonces

$$dz = \frac{R-r}{H} dx;$$

de aquí

$$dx = \frac{H dz}{R-r}.$$

Los nuevos límites de la integral serán:

$$z_i = \frac{R-r}{H} \cdot 0 + r = r, \quad z_s = \frac{R-r}{H} H + r = R.$$

Por consiguiente,

$$\pi \int_0^H \left(\frac{R-r}{H} x + r \right)^2 dx = \pi \int_r^R z^2 \frac{H dz}{R-r} =$$

$$= \frac{\pi H}{R-r} \frac{z^3}{3} \Big|_r^R = \frac{\pi H}{3(R-r)} \cdot (R^3 - r^3) =$$

$$= \frac{\pi H}{3(R-r)} \cdot (R-r)(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2),$$

$$v = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2). \qquad (3)$$

Volumen de la esfera. La esfera se engendra por la rotación de un semicírculo con el centro en el origen de coordenadas alrededor del eje Ox (fig. 131). La ecuación de la circunferencia de radio R representada en la fig. 131 tiene la forma

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

de donde,

$$y^2 = R^2 - x^2.$$

De acuerdo con la fórmula (1), hallaremos:

$$v = \pi \int_{-R}^{+R} y^2 dx = \pi \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$v = \frac{4}{3} \pi R^3. \qquad (4)$$

El diámetro de la esfera $D = 2R$; de aquí

$$R = \frac{D}{2} \quad y \quad R^3 = \frac{D^3}{8},$$

por lo tanto,

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{D^3}{8} = \frac{\pi D^3}{6},$$

o sea,

$$v = \frac{\pi D^3}{6}. \qquad (4^*)$$

La fórmula (4*) expresa el volumen de la esfera a través de su diámetro.

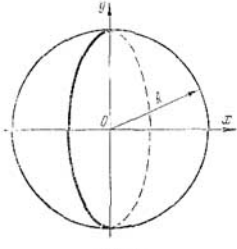


FIG. 131

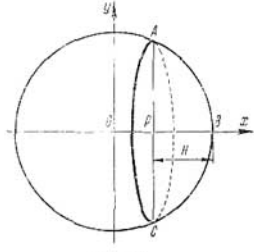


FIG. 132

Volumen del segmento esférico. El segmento esférico puede engendrarse mediante la rotación de la mitad del segmento circular ABC alrededor del eje Ox (fig. 132). Designando con

H la altura PB del segmento esférico, y con R el radio del círculo, obtendremos:

$$v = \pi \int_{R-H}^{R} y^2 dx = \pi \int_{R-H}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{R-H}^{R} =$$

$$= \pi \left\{ R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) - \left[R^2 (R - H) - \frac{(R-H)^3}{3} \right] \} =$$

$$= \pi \left(\frac{2}{3} R^3 - R^3 + R^2 H + \frac{R^3 - 3R^2 H + 3RH^2 - H^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \Big(2R^3 - 3R^3 + 3R^2 H + R^3 - 3R^2 H + 3RH^2 - H^3 \Big) =$$

$$= \frac{\pi}{3} (3RH^2 - H^3) = \pi H^2 \Big(R - \frac{1}{3} H \Big),$$

$$v = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H \right). \qquad (5)$$

Volumen del sector esférico. El sector esférico puede representarse como el cuerpo engendrado por la rotación del sector circular OAB alrededor del eje Ox (fig. 133). Como evidencia la figura, el volumen del sector esférico es igual a la suma de los volúmenes del cono OAC y del segmento esférico ABC. Aplicando las fórmulas (2) y (5), hallaremos el volumen del sector esférico:

$$v = \frac{1}{3} \pi PA^2 \cdot OP + \pi PB^2 \left(OB - \frac{PB}{3} \right).$$

Designemos

$$PB = H, \quad OB = R;$$

entonces

$$OP = R - H$$

y del triángulo OAP

$$PA^2 = R^2 - (R - H)^2 = 2RH - H^2.$$

Sustituyendo los valores de PB, OB, OP y PA^2 en la expresión del volumen del sector esférico, obtendremos:

$$v = \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)(R - H) + \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{2}{3}R^2H - \frac{2}{3}RH^2 - \frac{1}{3}RH^2 + \frac{1}{3}H^3 + RH^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}H^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^2H \cdot$$

$$v = \frac{2}{3}\pi R^2H \cdot \qquad (6)$$

Volumen de la zona esférica. La zona esférica se obtiene como resultado de la rotación de la figura $ACQP$ alrededor del eje Ox, donde AC es el arco de una circunferencia con el centro en el origen de coordenadas (fig. 134).

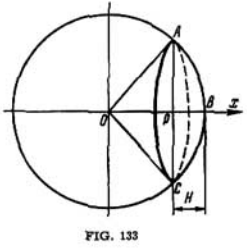


FIG. 133

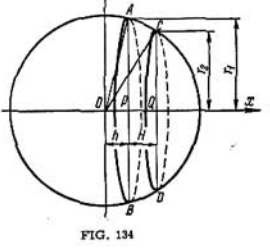


FIG. 134

Supongamos:

$$OA = OC = R, \qquad QC = r_2,$$

$$PA = r_1, \qquad OP = h,$$

$$PQ = H;$$

entonces, de acuerdo con la fórmula (1), el volumen de la zona esférica

$$v = \pi \int_{OP}^{OQ} y^2 dx = \pi \int_{h}^{H+h} (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{h}^{H+h} = \pi \left\{ \left[R^2 (H + h) - \frac{(H+h)^3}{3} \right] - \right.$$

$$\left. - \left(R^2 h - \frac{h^3}{3} \right) \right\} = \pi \left(R^2 H + R^2 h - \frac{H^2 + 3H^2 h + 3Hh^2 + h^3}{3} - \right.$$

$$\left. - R^2 h + \frac{h^3}{3} \right) = \pi \frac{3R^2 H - H^3 - 3H^2 h - 3Hh^2 - h^3 + h^3}{3} =$$

$$= \pi H \left(R^2 - h^2 - Hh - \frac{1}{3} H^2 \right).$$

Pero como $R^2 = r_1^2 + h^2$ (del triángulo OAP) y $R^2 = r_2^2 + (H + h)^2$ (del triángulo OCQ), entonces,

$$r_1^2 + h^2 = r_2^2 + (H + h)^2,$$

o

$$r_1^2 + h^2 = r_2^2 + H^2 + 2Hh + h^2,$$

de aquí

$$Hh = \frac{r_1^2 - r_2^2 - H^2}{2}.$$

Sustituyendo los valores hallados de R^2 y Hh en la expresión del volumen de la zona esférica, obtendremos:

$$v = \pi H \left(r_1^2 + h^2 - h^2 - \frac{r_1^2 - r_2^2 - H^2}{2} - \frac{1}{3} H^2 \right) =$$

$$= \pi H \left(\frac{2r_1^2 - r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{1}{2} H^2 - \frac{1}{3} H^2 \right) =$$

$$= \pi H \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \pi \frac{H^3}{6},$$

$$v = \pi H \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \pi \frac{H^3}{6}. \qquad (7)$$

Ejercicios

1. Una figura limitada por las rectas $y = -x + 3$, $x = 0$, $x = 3$ e $y = 0$ rota alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido.

2. Una figura está limitada por la curva $y = \frac{1}{x}$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$ e $y = 0$. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por su rotación alrededor del eje Ox.

3. En una esfera de radio $R = 5$ cm se ha cortado un segmento de altura $h = 2$ cm. Hallar el volumen de este segmento.

4. Hallar el volumen de un sector esférico si el radio de su base $r = 3$ cm y el radio de la esfera $R = 5$ cm.

5. Hallar el volumen de una zona esférica si los radios de sus bases $r_1 = 5$ cm y $r_2 = 8$ cm y la altura $h = 3$ cm.

6. Deducir la fórmula del volumen de un elipsoide de revolución engendrado por rotación alrededor del eje Ox.

7. Hallar el volumen de un paraboloide de revolución si el radio de su base es igual a 60 cm y la altura, 50 cm.

8. Hallar el volumen del cuerpo que una figura limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ engendra al rotar alrededor del eje Ox.

9. Hallar el volumen del cuerpo que una figura limitada por el eje de abscisas y la curva:

$$1)\ y = 2x - x^2, \qquad 2)\ y = x^2 - 4$$

engendra al rotar alrededor del eje Ox.

10. Hallar el volumen del cuerpo que una figura limitada por las líneas:

$$y = x^2 + 1 \text{ e } y = 2$$

engendra al rotar alrededor del eje Ox.

§ 117. Superficie de la esfera y de sus partes.

Superficie de la esfera. Cubramos toda la superficie esférica con multitud de triángulos esféricos *. Mediante líneas rectas, unamos los vértices de estos triángulos entre sí y con el centro de la esfera. Obtendremos multitud de pirámides cuyas bases son triángulos planos. Una de tales pirámides está representada en la fig. 135. Designemos con ΔV el volumen de la pirámide elemental; entonces, tendremos:

$$\Delta V \approx \frac{1}{3} h \Delta S (\S\ 115),$$

*) Se llama triángulo esférico la figura superficial esférica constituida por tres arcos de círculo máximo que se cortan. Los puntos de intersección de estos arcos reciben el nombre de vértices del triángulo, y los arcos que forman el triángulo, lados del mismo.

donde ΔS es el área del triángulo que sirve de base y h, la altura de la pirámide elemental. Supongamos que el volumen de la esfera sea V_e y su superficie, S. Sumando los volúmenes de todas estas pirámides elementales, obtendremos, aproximadamente, el volumen de la esfera, o sea,

$$V_e \approx \sum_0^S \frac{1}{3} h \Delta S.$$

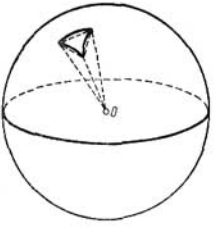


FIG. 135

Si se aumenta infinitamente el número de triángulos esféricos, $\Delta S \to 0$ y $h \to R$ (radio de la esfera). En este caso

$$V_e = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_0^S \frac{1}{3} h \Delta S = \int_0^S \frac{1}{3} R dS =$$

$$= \frac{1}{3} R \int_0^S dS = \frac{1}{3} RS. \quad (1)$$

Como se sabe [(4), § 116], el volumen de la esfera

$$V_e = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Sustituyendo en la igualdad (1) V_e por su valor, obtendremos:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{3} RS,$$

de donde

$$S = 4\pi R^2. \quad (2)$$

Se sabe que $2R = D$ (diámetro de la esfera); de aquí, $4R^2 = D^2$, por lo que

$$S = \pi D^2. \quad (3)$$

La fórmula (3) expresa la superficie de la esfera por su diámetro.

Area del casquete esférico. Razonamos igual que en la deducción de la fórmula de la superficie esférica. Cubramos la superficie del casquete con multitud de triángulos esféricos y, por medio de rectas, unamos sus vértices entre sí y

con el centro de la esfera. Obtendremos numerosas pirámides, cuyas bases son triángulos planos. Una de tales pirámides está representada en la fig. 136. El volumen de la pirámide elemental

$$\Delta V \approx \frac{1}{3} h \Delta S,$$

donde h es la altura de dicha pirámide y ΔS, el área de su base. Aumentemos infinitamente la cantidad de triángulos

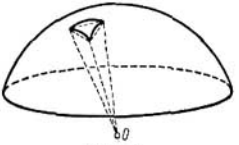


FIG. 136

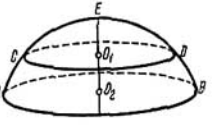


FIG. 137

en el casquete esférico; entonces, $\Delta S \to 0$ y $h \to R$. Sumando las infinitesimales del tipo $\frac{1}{3} h \Delta S$, obtendremos el volumen del sector esférico

$$V_{\text{sec. e.}} = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{0}^{S_{\text{cas. e.}}} \frac{1}{3} h \Delta S = \int_{0}^{S_{\text{cas. e.}}} \frac{1}{3} R ds =$$

$$= \frac{1}{3} R \int_{0}^{S_{\text{cas. e.}}} dS = \frac{1}{3} R S_{\text{cas. e.}}$$

Pero

$$V_{\text{sec. e.}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H \text{ [(6), § 116]},$$

por consiguiente,

$$\frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} R S_{\text{cas. e.}},$$

de donde

$$S_{\text{cas. e.}} = 2 \pi R H, \tag{4}$$

o $S_{\text{cas. e}} = \pi D H$, donde D es el diámetro de la esfera.

Superficie de la zona esférica. La superficie de la zona esférica $ABCD$ (fig. 137) puede considerarse como la dife-

rencia entre las superficies de dos casquetes esféricos: AEB y CED. Designando con H la altura del casquete AEB, con h_1 la del CED y con h la de la zona esférica, obtendremos:

$$S_{\text{zona e.}} = S_{\text{cas. AEB}} - S_{\text{cas. CED}} = 2\pi RH - 2\pi Rh_1 =$$

$$= 2\pi R(H - h_1) = 2\pi Rh,$$

$$S_{\text{zona e.}} = 2\pi Rh, \qquad (5)$$

o

$S_{\text{zona e.}} = \pi Dh$, donde $D = 2R$ es el diámetro de la esfera.

§ 118. Espacio recorrido por un cuerpo. El espacio s recorrido por un cuerpo que se mueve en línea recta durante el tiempo t a velocidad constante v, se expresa por la fórmula

$$s = vt. \qquad (1)$$

Si el movimiento es no uniforme, la velocidad del cuerpo cambia en función del tiempo t, o sea,

$$v = f(t).$$

En este caso, para hallar el espacio recorrido por el cuerpo durante el tiempo comprendido entre $t = t_1$ y $t = t_2$, dividamos el intervalo $t_2 - t_1$ en n partes Δt, iguales y muy pequeñas. Supongamos que durante cada intervalo de tiempo Δt la velocidad es constante y cambia, en forma de salto, al final de cada uno de ellos. Supongamos, por ejemplo, que hemos dividido $t_2 - t_1$ en intervalos $\Delta t = 1$ s. De acuerdo con este supuesto, en el curso del primer segundo el cuerpo se desplaza uniformemente y, al finalizar ése, cambia de velocidad y continúa moviéndose uniformemente durante el siguiente segundo, a la velocidad recibida; luego, al final de este segundo adquiere una nueva velocidad, a la que se desplaza uniformemente durante el tercer segundo, y así sucesivamente.

Por eso, el espacio recorrido por el cuerpo en el tiempo Δt se hallará por la fórmula (1) y será aproximadamente igual a $f(t)\,\Delta t$, y en el tiempo $t_2 \to t_1$, el espacio

$$s \approx \sum_{t_1}^{t_2} f(t)\,\Delta t.$$

Aumentemos el número n de divisiones; entonces, Δt y los saltos del cambio de velocidad al final de cada intervalo Δt serán cada vez menores. Si $n \to \infty$, $\Delta t \to 0$ y, por consiguiente, también $f(t)\ \Delta t \to 0$. Al verificarse esta condición, la velocidad del cuerpo ya no varía en forma de salto, sino continuamente, y el recorrido será igual a:

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} f(t)\ \Delta t,$$

o, de acuerdo con la fórmula (5) (§ 113),

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} f(t)\ \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt,\ s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt. \qquad (2)$$

EJEMPLO. La velocidad de movimiento de un cuerpo viene dada por la ecuación

$$v = (2t^2 + t)\ \text{cm/s}.$$

Hallar el espacio que recorre en 6 s contados a partir del comienzo del movimiento.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la fórmula (2), tenemos:

$$s = \int_0^6 (2t^2 + t)\, dt = \left(\frac{2}{3}\, t^3 + \frac{1}{2}\, t^2\right)\Big|_0^6 = \frac{2}{3} \cdot 6^3 + \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 162\ \text{cm}.$$

Ejercicios

1. La velocidad de un cuerpo que cae en el vacío se define por la fórmula

$$v = 9{,}8t\ \text{m/s}.$$

¿Qué espacio recorrerá el cuerpo en los primeros 10 seg. de la caída?

2. Hallar la fórmula del espacio recorrido por un cuerpo que cae en el vacío si su velocidad de caída

$$v = gt\ \text{m/s}.$$

3. La velocidad de movimiento de un cuerpo se expresa por la fórmula

$$v = (3t^2 - 2t)\ \text{cm/s}.$$

¿Cuál será el espacio recorrido por el cuerpo al cabo de 5 seg. contados a partir del inicio del desplazamiento?

4. La velocidad de movimiento de un cuerpo

$$v = \left(4t - \frac{6}{t^2}\right) \text{ cm/s.}$$

Determinar el espacio recorrido en el tercer segundo.

5. Dos cuerpos comienzan a desplazarse simultáneamente desde un mismo punto; uno, a la velocidad

$$v = 3t^2 \text{ m/min,}$$

otro, a la velocidad

$$v = 2t \text{ m/min.}$$

¿A qué distancia se hallarán uno de otro pasados 10 min si se mueven en línea recta y el mismo sentido?

6. Dos cuerpos se desplazan por una misma línea; uno, a la velocidad

$$v = (3t^2 + 2t) \text{ m/seg,}$$

y el otro, a la velocidad

$$v = (8t + 10) \text{ m/s.}$$

Si al comenzar su movimiento estaban juntos, ¿cuándo y a qué distancia del punto de partida volverán a encontrarse?

7. Hallar el espacio recorrido por un cuerpo desde el comienzo del movimiento hasta la parada, si su velocidad se expresa por la fórmula

$$v = (6t - 2t^2) \text{ cm/s.}$$

8. Una piedra se ha lanzado desde la tierra verticalmente hacia arriba. Hallar la altura máxima de elevación de la piedra si su velocidad

$$v = (19{,}6 - 9{,}8t) \text{ m/s.}$$

9. Una pelota se ha lanzado verticalmente hacia arriba a la velocidad inicial de 20 m/s. ¿Cuál será su altura máxima de elevación?

§ 119. Trabajo de una fuerza. Supongamos que un cuerpo se desplaza en línea recta por la acción de una fuerza constante F; entonces, el trabajo P realizado por esta fuerza en el espacio recorrido x se hallará mediante la fórmula

$$P = Fx, \tag{1}$$

donde x se expresa en metros; F, en kilogramos, y P, en kilográmetros.

Pero cuando el movimiento transcurre bajo la acción de una fuerza variable, la determinación de su trabajo es más complicada. Deduzcamos la fórmula para este caso.

Admitamos que en el punto O el cuerpo se encuentra en estado de reposo y comienza a desplazarse en línea recta (fig. 138) gracias a la acción de una fuerza variable F que *cambia en función del espacio recorrido* x, *o sea*,

$$F = f(x).$$

Supongamos también que en ciertos instantes de tiempo el cuerpo se encontrara en los puntos A y B, siendo

$$OA = a \text{ y } OB = b.$$

Mostremos cómo se determina el trabajo realizado por esta fuerza en el trayecto $AB = b - a$.

FIG. 138

Para este fin, dividámoslo en n partes Δx, iguales y muy pequeñas. Supongamos, igual que en el problema del § 118, que en los segmentos Δx la fuerza es constante, y varía, en forma de salto, al final de cada uno de ellos. Entonces, por la fórmula (1), el trabajo de la fuerza en el segmento Δx será aproximadamente igual a $f(x)\ \Delta x$, y el trabajo de la fuerza en todo el trayecto $AB = b - a$ será

$$P \approx \sum_a^b f(x)\ \Delta x.$$

Si el número n de divisiones se aumenta infinitamente Δx y, por consiguiente, $f(x)\ \Delta x$ se convertirán en infinitesimales. En estas condiciones, la fuerza no variará a saltos, sino de forma continua, y su trabajo será

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\ \Delta x,$$

o, de acuerdo con la fórmula (5) (§ 113),

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\ \Delta x = \int_a^b f(x)\ dx,$$

$$P = \int_a^b f(x)\ dx. \qquad (2)$$

EJEMPLO 1. Una fuerza de 1 kgf extiende un muelle en 3 cm. ¿Qué trabajo realiza en ello?

SOLUCIÓN. Por la ley de Hooke, la fuerza es proporcional a la extensión o contracción del muelle, o sea,

$$F = kx,$$

donde x es la magnitud de su extensión o contracción, y k, el coeficiente de proporcionalidad.

Para hallar el valor de k en nuestro problema, sustituyamos las magnitudes dadas en la ecuación que expresa la ley de Hooke; obtendremos:

$$1 = k \cdot 0{,}03,$$

de donde

$$k = \frac{1}{0{,}03}.$$

Por consiguiente, la fuerza que extiende nuestro muelle se expresará de la siguiente forma:

$$F = \frac{1}{0{,}03}\, x.$$

Como la fuerza comienza a actuar sobre un muelle que se encuentra en estado de reposo, el límite inferior de la integral en la fórmula (2) $a = 0$, y el superior, $b = 0{,}03$. Por consiguiente, el trabajo será:

$$P = \int_0^{0{,}03} \frac{1}{0{,}03}\, x\, dx = \frac{1}{0{,}03} \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}03} = \frac{1}{0{,}03} \cdot \frac{0{,}03^2}{2} =$$

$$= \frac{0{,}03}{2} = 0{,}015 \quad \text{kgfm}.$$

EJEMPLO 2. Un recipiente cilíndrico contiene aire atmosférico cuyo volumen $v_0 = 0{,}1$ m³. El cilindro se ha colocado en un medio de menor densidad, gracias a lo cual el aire en el recipiente se dilata y empuja un émbolo. Calcular el trabajo realizado por el aire cuando su volumen se dilata hasta $v_1 = 0{,}2$ m³. (La temperatura del aire se mantiene constante.)

SOLUCIÓN. Como se sabe, el volumen de un gas contenido en un recipiente cerrado y la presión que produce a temperatura constante están relacionados por la fórmula (ley de Boyle-Mariotte):

$$pv = k, \tag{3}$$

donde $k = \textbf{const}$. Para resolver el problema razonaremos lo mismo que al deducir la fórmula (2).

A medida que se empuja el émbolo, varía la fuerza de presión del aire sobre éste. Dividamos todo el recorrido del émbolo en n segmentos Δx muy pequeños, considerando que la presión es constante en cada uno de ellos y varía, en forma de salto, al pasar de un segmento Δx al siguiente. Entonces, el trabajo de la fuerza de presión en el segmento Δx será aproximadamente igual a

$$pS\Delta x, \tag{4}$$

donde p es la presión del aire por unidad de superficie, y S, el área del émbolo. Tomando en consideración que

$S\Delta x = \Delta v$ (por la fórmula del volumen del cilindro),

$$p = \frac{k}{v} \text{ (de la igualdad (3))},$$

la expresión (4) se puede representar en la forma

$$k\,\frac{\Delta v}{v}.$$

Sumando los trabajos elementales $k\,\frac{\Delta v}{v}$, obtendremos aproximadamente el trabajo de la fuerza de presión del aire cuando el volumen varía desde v_0 hasta v_1, es decir,

$$P \approx \sum_{v_0}^{v_1} k\,\frac{\Delta v}{v}.$$

Cuando $n \to \infty$

$$P = \lim_{\Delta v \to 0} \sum_{v_0}^{v_1} k\,\frac{\Delta v}{v}$$

o, de acuerdo con la fórmula (5) (§ 113),

$$P = \int_{v_0}^{v_1} k\frac{dv}{v} = k\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv}{v} = k \ln v \Big|_{v_0}^{v_1} =$$

$$= k(\ln v_1 - \ln v_0) = k \ln \frac{v_1}{v_0}. \qquad (5)$$

Para determinar el factor k, tomaremos en consideración que en el momento inicial el volumen del aire es de 0,1 m^3 y su presión normal, o sea, 10 330 kgf/m^2. Sustituyendo estas magnitudes en la igualdad (3), hallaremos:

$$k = 10\,330 \cdot 0{,}1 = 1033.$$

Sustituyendo, en la igualdad (5), k, v_1 y v_0 por sus valores, obtendremos:

$$P = 1033 \cdot \ln \frac{0{,}2}{0{,}1} = 1033 \cdot \ln 2 = 1033 \cdot 0{,}693 \approx$$

$$\approx 716 \text{ kgfm}.$$

Ejercicios

1. Una fuerza de 6 kgf alarga un muelle 8 cm. ¿Qué trabajo realiza?
2. Calcular el trabajo realizado para contraer un muelle 4 cm, si para contraerlo 1 cm se requiere una fuerza de 1 kgf.
3. Un muelle se alarga 6 cm por la acción de una fuerza de 3 kgf. ¿Qué trabajo realizará esta fuerza si el muelle se alarga 10 cm?
4. Hallar el trabajo necesario para contraer un muelle 3 cm, si se sabe que para contraerlo 0,5 cm se requiere aplicar una fuerza de 1 kgf.
5. Para alargar un muelle 2 cm basta aplicar una fuerza de 6 kgf. La longitud inicial del muelle es de 14 cm. ¿Qué trabajo deberá realizarse para extenderlo hasta 20 cm?
6. Para alargar un muelle 4 cm se efectuó un trabajo de 10 kgfm. ¿Qué trabajo se realizará al alargar el muelle 10 cm?
7. Para alargar 2 cm cierto muelle es necesario realizar un trabajo de 20 kgfm. ¿Cuánto puede alargarse invirtiendo un trabajo de 80kgf m?
8. Un muelle, en estado de reposo, tiene 20 cm de largo. Una carga de 10 kgf lo alarga 2,5 cm. ¿Qué trabajo se requiere para extenderlo desde los 25 cm de largo hasta 35 cm?
9. Para extender una varilla metálica desde una longitud l hasta $l + x$, hay que aplicar una fuerza

$$F = \frac{k}{l}x,$$

donde k es una magnitud constante. Calcular el trabajo realizado por la fuerza para alargar la varilla desde la longitud l hasta la l_1.

10. Un resorte se comba 1 cm bajo la acción de una carga de 1,5 t. ¿Qué trabajo deberá invertirse para que la deformación del resorte sea de 3 cm? (La fuerza de deformación es proporcional a la magnitud de ésta.)

11. Dos cargas eléctricas $e_1 = +100$ unidades electrostáticas (ues) y $e_2 = +50$ (ues) están fijadas a la distancia de 10 cm una de otra. Hallar el trabajo a realizar por la fuerza de repulsión si la carga e_2 se dejase libre y, desplazándose, se alejara 50 cm de la e_1. (La fuerza de repulsión F que actúa sobre una carga en movimiento, la e_2, se determina por la fórmula de la ley de Coulomb

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

donde r es la distancia entre las cargas.)

12. Un cilindro contiene aire atmosférico cuyo volumen es de 0,3 m³. El cilindro está colocado en un medio de menor densidad, gracias a lo cual el aire se dilata y empuja un émbolo. Calcular el trabajo realizado por el aire si se dilata hasta 0,9 m³. (La temperatura del aire se mantiene constante.)

13. Un recipiente cilíndrico contiene 0,1 m³ de aire atmosférico cuya temperatura se mantiene constante. El aire de este recipiente se dilata y empuja un pistón. ¿Qué volumen alcanzará el aire en caso de que el trabajo por él realizado sea de 2600 kgfm?

14. Un cilindro con pistón móvil contiene aire atmosférico. El volumen del cilindro es igual a 0,2 m³. El pistón comprime el aire hasta el volumen de 0,06 m³. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza de presión del aire si la temperatura de éste se mantiene constante.

15. Un recipiente cilíndrico cuyo volumen $v_0 = 0,1$ m³ contiene aire atmosférico sometido a compresión por un émbolo móvil. ¿Qué trabajo habrá de invertirse para comprimir el aire del recipiente hasta un volumen $v_1 = 0,04$ m³, manteniendo constante su temperatura?

16. En cierto medio, un cuerpo se desplaza en línea recta según la ley $S = t^2$. La resistencia del medio es proporcional al cuadrado de la velocidad de movimiento. Calcular el trabajo invertido por la resistencia del medio si el cuerpo se desplaza desde $s = 0$ hasta $s = a$.

t

§ 120. Trabajo realizado al levantar una carga.

Por la física se sabe que cuando se levanta una carga a cierta altura se efectúa un trabajo igual al producto del peso, expresado en kilogramos, por la altura de elevación, expresada en metros. El propio trabajo se mide en kilográmetros. Resolvamos varios problemas.

PROBLEMA 1. Es necesario bombear el agua de un tanque cilíndrico lleno hasta los bordes. ¿Qué trabajo habrá que realizar si el radio de la base del tanque $R = 0,6$ m y su altura $H = 3$ m?

SOLUCIÓN. Si levantáramos a cierta altura el tanque con el agua, el trabajo requerido para ello se calcularía fácilmente

multiplicando el peso de la carga por la altura de la elevación. Pero el trabajo invertido al bombear un líquido se determina de otra forma, más compleja, por cuanto el líquido no se eleva todo de una vez, sino por partes, capas; además, la altura de elevación de las distintas capas es diferente.

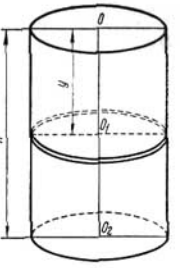


FIG. 139

Para resolver el problema, dividamos el cilindro, por medio de planos paralelos a su base, en capas finas (fig. 139). Separando una de ellas a la profundidad

$$OO_1 = y$$

y designando con Δy y Δv su espesor y su volumen, respectivamente, obtendremos

$$\Delta v = \pi R^2 \, \Delta y \text{ m}^3.$$

El peso del agua ΔQ en el volumen hallado será:

$$\Delta Q = \pi R^2 \Delta \, y \text{ tf},$$

pues 1 m³ de agua pesa 1 tf. Expresemos ΔQ en kilogramos:

$$\Delta Q = 1000 \, \pi R^2 \Delta y \text{ kgf}.$$

Para bombear el agua de esta capa, hay que elevarla hasta el borde del tanque, es decir, a la altura

$$O_1O = y.$$

El trabajo ΔP que se realiza en este caso se expresará así:

$$\Delta P = \Delta Q \cdot O_1O = 1000\pi R^2 y \Delta y \text{ kgm}. \qquad (1)$$

Al elevar sucesivamente las capas, de la primera a la última, hasta el borde del tanque, en cada caso se invierte un trabajo expresado por la igualdad (1); además, la magnitud y tiene un valor propio para cada capa, comprendido

entre los límites de 0 a H. El trabajo necesario para elevar todo el agua se expresará, entonces, en la forma

$$\sum_0^H 1000\pi R^2 y \Delta y.$$

Pero el valor obtenido para el trabajo es aproximado. Para calcular el trabajo buscado, aumentaremos infinitamente el número de divisiones del cilindro por los planos; entonces, todo el trabajo será

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_0^H 1000\pi R^2 y \Delta y,$$

o, de acuerdo con la fórmula (5) (§ 113),

$$P = \int_0^H 1000\pi R^2 y \, dy = 1000\pi R^2 \frac{y^2}{2}\Big|_0^H =$$

$$= 1000\pi R^2 \cdot \frac{H^2}{2} = 500\pi R^2 H^2.$$

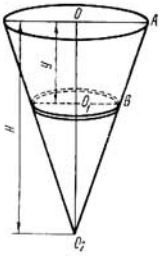


FIG. 140

Sustituyendo R y H por sus valores, hallamos:

$$P = 500\,\pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}3^2 = 1620\,\pi \text{ kgm.}$$

PROBLEMA 2. Un recipiente cónico, lleno de agua, está colocado con el vértice en la superficie de la tierra y tiene la altura $H = 3$ m y el radio de la base $R = 90$ cm. ¿Qué trabajo deberá realizarse para vaciarlo por bombeo?

SOLUCIÓN. Dividamos el cono, lo mismo que en el primer problema, en capas finas y tomemos cada una de ellas por un cilindro. Separemos uno de ellos en la profundidad $OO_1 = y$ (fig. 140). Designando su espesor y su volumen con Δy y Δv, respectivamente, anotaremos:

$$\Delta v = \pi \cdot O_1 B^2 \Delta y \text{ m}^3. \qquad (2)$$

Expresemos O_1B mediante y; de la semejanza de los triángulos O_2O_1B y O_2OA, se tiene:

$$\frac{O_1B}{OA} = \frac{O_2O_1}{O_2O},$$

de donde

$$O_1B = \frac{OA}{O_2O} \cdot O_2O_1 = \frac{OA}{O_2O}(O_2O - OO_1) = \frac{R}{H}(H - y).$$

Sustituyendo en la igualdad (2) O_1B por el valor hallado, obtendremos:

$$\Delta v = \pi \frac{R^2}{H^2}(H - y)^2 \Delta y \text{ m}^3.$$

El peso ΔQ del agua en el volumen Δv será:

$$\Delta Q = 1000 \frac{\pi R^2}{H^2}(H - y)^2 \Delta y \text{ kgf}.$$

El trabajo ΔP invertido para elevar un peso ΔQ kgf de agua a la altura

$$O_1O = y,$$

se expresará así:

$$\Delta P = \Delta Q \cdot O_1O_2 = 1000\pi \frac{R}{H^2} y(H - y)^2 \Delta y \text{ kgm}.$$

Entonces, el trabajo necesario para elevar toda el agua será aproximadamente igual a

$$\sum_0^H 1000 \pi \frac{R^2}{H^2} y(H - y)^2 \Delta y.$$

Si el número de divisiones del cono se aumenta infinitamente, el trabajo buscado

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_0^H 1000 \pi \frac{R^2}{H^2} y(H - y)^2 \Delta y,$$

o, de acuerdo con la fórmula (5) (§ 113),

$$P = \int_0^H 1000\,\pi\,\frac{R^2}{H^2}\,y(H-y)^2 dy =$$

$$= 1000\,\pi\,\frac{R^2}{H^2}\int_0^H (H^2y - 2Hy^2 + y^3)\,dy =$$

$$= 1000\pi\,\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{H^2y^2}{2} - \frac{2Hy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{1000\,\pi R^2}{H^2}\left(\frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4}\right) = \frac{1000\,\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^4}{12} = \frac{250\pi R^2H^2}{3}$$

o, después de sustituir R y H por sus valores,

$$P = \frac{250\pi\cdot 0{,}9^2\cdot 3^2}{3} = 607{,}5\,\pi\ \text{kgm}.$$

Ejercicios

1. Un tanque de base rectangular de 50 cm × 80 cm y altura igual a 60 cm, está lleno de agua. Hallar el trabajo que debe realizarse para vaciar por bombeo el tanque.

2. Un recipiente cilíndrico con el diámetro de la base $D = 50$ cm y la altura $H = 70$ cm, está lleno de agua. Calcular el trabajo necesario para vaciar por bombeo el recipiente.

3. Hallar el trabajo requerido para bombear el keroseno de una cisterna con el radio de la base $R = 2$ m y la altura $H = 3$ m. (El peso específico del keroseno $d = 0{,}8$.)

4. Una cisterna cilíndrica de 2 m de diámetro y 4 m de profundidad está llena de agua. ¿Qué trabajo deberá invertirse para elevar toda el agua 15 m sobre el borde superior de la cisterna?

5. Una soga de 50 m de largo y 2 cm^2 de sección transversal, fabricada de un material cuya densidad es 6,4 gf/cm^3, se saca de una mina a la superficie de la tierra. Determinar el trabajo realizado.

6. Un recipiente de forma cónica con el vértice hacia abajo, está lleno de agua. ¿Qué trabajo se requiere para bombear toda el agua del recipiente si el radio de la base del cono $R = 50$ cm y la altura $H = 1$ m?

7. Calcular el trabajo necesario para formar un montón de arena de forma cónica con el radio de la base igual a 1,2 m, y la altura, 1 m. (El peso específico de la arena es de 2 gf/cm^3; la arena se levanta desde la superficie de la tierra.)

8. Un recipiente, en forma de cono truncado, está lleno de agua. ¿Qué trabajo debe invertirse para vaciarlo por bombeo si los radios de las bases $R = 2$ m y $r = 1$ m, y la altura $H = 3$ m?

9. De una mina de $l = 100$ m de profundidad hay que elevar una jaula que pesa $Q = 1000$ kgf y pende de una soga enrollada a un tambor. Calcular el trabajo necesario para elevar la jaula, si el peso de un metro lineal de soga $q = 2$ kgf.

10. Hallar el trabajo requerido para bombear el agua de una caldera semiesférica cuyo radio $R = 3$ m.

11. Una caldera tiene forma de paraboloide de revolución, siendo la profundidad $H = 0{,}5$ m y el radio de la base $R = 0{,}4$ m. Determinar el trabajo necesario para bombear toda el agua de la caldera llena hasta los bordes.

§ 121. Presión de un líquido.

PROBLEMA 1. Una placa rectangular, cuyas dimensiones son 20 cm × 30 cm, está sumergida en el agua de modo que su lado menor se halla en la superficie de ésta y el mayor tiene posición vertical. Calcular la presión del agua sobre la placa.

SOLUCIÓN. Supongamos que la placa dada $ABCD$ está situada como indica la fig. 141, donde MN es la superficie del agua. Si esta placa estuviese en posición horizontal, la presión del agua sobre ella sería igual al peso de una columna de líquido que tuviera por base dicha placa, y por altura, la distancia de la misma a la superficie del agua. Pero esta ley no puede aplicarse para calcular la presión del agua sobre una superficie vertical, ya que la presión por unidad de superficie varía con la profundidad.

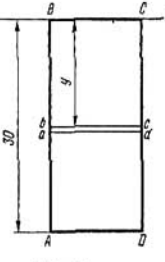


FIG. 141

Para resolver el problema, dividamos la placa en gran número de franjas paralelas a AD. Separando una de ellas, la $abcd$, por ejemplo, en la profundidad

$$Bb = y$$

y designando con Δy su anchura, y con Δs, el área, hallaremos

$$\Delta s = ad \cdot ab = 20\ \Delta y\ \text{cm}^2. \quad (1)$$

A la profundidad Bb, la superficie horizontal de 1 cm² sufre una presión igual al peso de una columna de agua que tenga 1 cm² de área de la base y $Bb = y$ de altura, es decir, una

presión igual a y (la altura se expresa en centímetros, y la presión, en gramos).

Por la ley de Pascal, la presión de un líquido se transmite en todos sentidos con la misma fuerza; por este motivo, su presión sobre 1 cm² de la franja *abcd* situada en posición vertical, será aproximadamente y. En cambio, la presión ΔP sobre toda la franja *abcd* se expresará así:

$$\Delta P = y\Delta s,$$

o, después de sustituir Δs de acuerdo con la igualdad (1),

$$\Delta P = 20y\Delta y. \qquad (2)$$

Hallando de este modo la presión del agua sobre cada una de las franjas que constituyen la placa $ABCD$, obtendremos, en cada caso, la magnitud de esta presión definida por la igualdad (2), donde el valor de y corresponde a la profundidad en que se halla una u otra franja. Entonces, la presión del agua sobre toda la placa será aproximadamente igual a

$$\sum_{0}^{30} 20y\Delta y.$$

Aumentemos infinitamente el número de divisiones de la placa $ABCD$; entonces, la magnitud de la presión

$$P = \lim_{\Delta y \to} \sum_{0}^{30} 20y\Delta y = \int_{0}^{30} 20y\,dy = 20\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^{30} =$$

$$= 10 \cdot 30^2 = 9000 \text{ gf} = 9 \text{ kgf}.$$

Problema 2. Una placa en forma de triángulo rectángulo ABC con los catetos $AB = 12$ cm y $AC = 9$ cm, se ha sumergido en mercurio de modo que el cateto AB ocupa una posición vertical y el vértice B se halla 3 cm debajo del nivel del mercurio. Calcular la presión del mercurio sobre esta placa (el peso específico del mercurio es 13,6 gf/cm³).

Solución. La posición de la placa se indica en la fig. 142, donde MN es el nivel del mercurio. Lo mismo que en el problema 1, dividamos la placa ABC en gran número de

franjas paralelas a AC y consideremos que son rectángulos. Separemos una de ellas, la *abcd*, por ejemplo, situada a la profundidad Db.

Designando Bb con y, y la anchura de la franja *abcd* con Δy, hallemos su área ΔS (en centímetros cuadrados):

$$\Delta S = bc \cdot \Delta y. \qquad (3)$$

De acuerdo con la ley de Pascal, la presión del mercurio sobre una superficie de 1 cm² situada a la profundidad

$$Db = Bb + DB = y + 3,$$

es aproximadamente igual a

$$13{,}6Db = 13{,}6(y + 3),$$

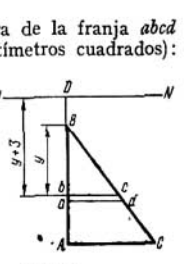


FIG. 142

y la presión ΔP sobre toda la franja *abcd* se expresará así:

$$\Delta P = 13{,}6\ (y + 3)\ \Delta S,$$

o, de acuerdo con la igualdad (3),

$$\Delta P = 13{,}6(y + 3) \cdot bc \cdot \Delta y = 13{,}6 \cdot bc(y + 3)\ \Delta y. \qquad (4)$$

Expresemos con y la longitud de la franja bc; para ello, examinemos los triángulos ABC y bBc; de su semejanza se deduce

$$\frac{bc}{AC} = \frac{Bb}{AB},$$

o

$$\frac{bc}{9} = \frac{y}{12},$$

de donde

$$bc = \frac{9}{12}\, y = \frac{3}{4}\, y.$$

Ahora, la igualdad (4) se transcribirá así:

$$\Delta P = 13{,}6 \cdot \frac{3}{4}\, y(y + 3)\ \Delta y = 10{,}2(y^2 + 3y)\ \Delta y. \qquad (5)$$

La presión (en gramos) sobre cada una de las restantes franjas se determinará por la igualdad (5), donde y toma los valores comprendidos entre los límites de 0 a 12. Sumando todas estas presiones, obtendremos la magnitud de la presión sobre la placa ABC, aproximadamente igual a

$$\sum_{0}^{12} 10{,}2(y^2 + 3y)\ \Delta y.$$

Si se aumenta infinitamente el número de divisiones de la placa ABC, la magnitud de la presión sobre la misma será

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{0}^{12} 10{,}2\,(y^2 + 3y)\ \Delta y = \int_{0}^{12} 10{,}2\,(y^2 + 3y)\,dy =$$

$$= 10{,}2 \left(\frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_0^{12} = 10{,}2 \left(\frac{12^3}{3} + \frac{3 \cdot 12^2}{2} \right) =$$

$$= 10{,}2\,(576 + 216) = 10{,}2 \cdot 792 = 8078{,}4 \text{ gf} = 8{,}08 \text{ kgf}.$$

Ejercicios

1. Hallar la presión que el agua que llena un acuario ejerce sobre una de sus paredes de 60 cm de largo y 20 cm de altura.

2. Hallar la presión que ejerce el agua sobre las paredes de un acuario lleno hasta una altura de 0,5 m, si las dimensiones del fondo son 1,2 m × 1,3 m.

3. Hallar la presión del agua sobre una placa rectangular colocada en posición vertical, cuyas dimensiones son 3 m × 2 m, si su lado mayor está situado verticalmente, y el menor, se encuentra 1,5 m debajo de la superficie del agua.

4. La pared lateral de un recipiente tiene un orificio rectangular de 60 cm × 40 cm. ¿Con qué fuerza presiona el agua la válvula que cierra el orificio, si la posición de su lado mayor es horizontal y se halla 2 m debajo de la superficie del agua?

5. Una placa en forma de rombo con los lados de 5 cm y una de las diagonales de 8 cm, está sumergida en el agua verticalmente. Hallar la presión del agua sobre esta placa si:

1) su lado se encuentra en la superficie del agua;

2) su lado superior se halla 2 cm debajo de la superficie del agua.

6. Una placa en forma de triángulo de 2 cm de base y 1,5 cm de altura está sumergida en el agua verticalmente. Hallar la presión que sufre la placa si:

1) su vértice se halla en la superficie del agua y la base, paralela a ésta;

2) el vértice está 0,5 cm debajo de la superficie del agua, y la base, paralela a la misma.

7. Demostrar que si una placa triangular se encuentra sumergida en el agua verticalmente, de modo que su base esté en la superficie del líquido, la fuerza P de la presión del agua sobre la placa se expresará por la fórmula

$$P = S \cdot \frac{h}{3},$$

donde S es el área de la placa, y h, su altura.

8. Un vaso cilíndrico está lleno de aceite. Calcular la presión del aceite sobre la superficie lateral del vaso, si su altura $H = 11$ cm y el radio de la base $R = 4$ cm. El peso específico del aceite $d = 0{,}9$.

9. Calcular la presión del mercurio sobre la superficie lateral del vaso que lo contiene, si la altura de éste $H = 8$ cm y el radio de su base $R = 3{,}5$ cm. El peso específico del mercurio $d = 13{,}6$.

10. Una portilla redonda de 30 cm de diámetro, situada en el costado vertical de un buque, está sumergida hasta la mitad en el agua. Hallar la presión del agua sobre la parte sumergida de la portilla.

11. Un tubo horizontal, cuya sección transversal es un círculo de 6 m de diámetro, está lleno de agua hasta la mitad. Hallar la presión ejercida por el agua sobre la válvula vertical que cierra el tubo.

12. Calcular la presión del agua sobre una presa en forma de trapecio cuya base superior es igual a 6,4 m, la inferior, 4,2 m y la altura, 3 m, si el agua llega hasta la parte superior de la presa.

13. La parte delantera de un dique tiene forma de parábola con el vértice hacia abajo. La base del dique $a = 3{,}2$ m, y su altura $h = 1{,}6$ m. Determinar la presión del agua sobre el dique si ésta llega hasta su parte superior.

14. ¿A qué profundidad hay que trazar una línea horizontal en la pared de un acuario de 60 cm de largo y 25 cm de alto, para que la presión sufrida por la parte de la pared situada encima de esta línea sea igual a la que recae sobre la situada debajo?

Capítulo XIII
Ecuaciones diferenciales

§ 122. **Nociones generales.** Recibe el nombre de *ecuación diferencial* la ecuación que contiene las derivadas de la función buscada o sus diferenciales. Por ejemplo, $x\,dy = 2y\,dx$ o $y' = 4x$ son ecuaciones diferenciales.

Resolver una ecuación diferencial significa hallar la función de x que satisface la ecuación dada, o sea, que convierte dicha ecuación en identidad al sustituirla por y.

La ecuación que contiene derivadas o diferenciales de orden no superior al primero se llama *ecuación diferencial de primer orden*.

Las ecuaciones diferenciales tienen gran aplicación en geometría, mecánica, física y otras disciplinas, así como en técnica.

En el § 107, examinamos un ejemplo de solución de una ecuación diferencial: hallar la ecuación de la curva por el coeficiente angular de la tangente. El resultado de la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1}$$

fue la expresión

$$y = x^2 + C, \tag{2}$$

que recibe el nombre de *solución general de la ecuación diferencial*. Sustituyendo x e y por sus valores 1 y 3, hallamos la expresión

$$y = x^2 + 2,$$

denominada *solución particular de la ecuación diferencial**).

*) La solución general de una ecuación diferencial contiene siempre la constante arbitraria C; en la solución particular, esta constante es un número determinado.

Los valores dados $x = 1$ e $y = 3$ se llaman *condiciones iniciales;* se dan para que de la solución general se obtenga la particular.

Es fácil comprobar si la ecuación diferencial está resuelta correctamente: basta con sustituir la expresión (2) en la ecuación (1). El resultado será:

$$\frac{d(x^2 + C)}{dx} = 2x,$$

o

$$\frac{2x\,dx}{dx} = 2x,$$

es decir,

$$2x = 2x,$$

lo que indica que la solución de la ecuación (1) es correcta.

§ 123. Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separadas. Si cada miembro de la ecuación diferencial es el producto de cierta expresión, dependiente de una variable, por la diferencial de esta variable, se dice que, en la ecuación, las *variables* están separadas; por ejemplo, $x\,dx = y\,dy$. En este caso, se puede integrar cada término de la ecuación.

Las ecuaciones de variables que se separan reciben el nombre de *ecuaciones diferenciales de variables separadas*.

Para resolver una ecuación diferencial de variables separadas, hay que separar éstas y, después, integrar ambos miembros de la ecuación.

Examinemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación $x\,dy = y\,dx$, si cuando $x = 5$ se tiene $y = 10$.

SOLUCIÓN. Para separar las variables, dividamos por el producto xy ambos miembros de la ecuación; obtendremos

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando ambos miembros de la última ecuación, hallaremos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

o

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln |C|.$$

En el miembro derecho se ha agregado una constante de la forma $\ln |C|$ para facilitar la potenciación. Potenciando, obtendremos:

$$|y| = |Cx|, \text{ o } y = \pm Cx.$$

La solución general de la ecuación inicial puede anotarse simplemente en la forma

$$y = Cx$$

(¡los signos $\pm$ se pueden omitir, ya que la presencia de la constante arbitraria C los toma en consideración implícitamente!) Para hallar la constante C, sustituyamos, en la solución obtenida, las condiciones iniciales $x = 5$ e $y = 10$; se tendrá

$$10 = 5C,$$

de donde

$$C = 2.$$

Por consiguiente, la solución particular buscada será

$$y = 2x.$$

De este modo, de todas las rectas (familia de rectas) que pasan por el origen de coordenadas, hemos separado una, en la que se halla el punto con las coordenadas (5; 10).

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = 2(y - 3)$, si para $x = 0$ se tiene $y = 4$.

SOLUCIÓN. Después de separar las variables obtendremos:

$$\frac{dy}{y-3} = 2\,dx,$$

de aquí

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2\,dx,$$

o

$$\ln|y - 3| = 2x + \ln|C|.$$

Para potenciar, el miembro derecho de la última igualdad debe anotarse también con el signo del logaritmo. Conforme a la definición de logaritmo, se tiene:

$$2x = \ln e^{2x};$$

por consiguiente, la solución general puede transcribirse en la forma

$$\ln|y-3| = \ln e^{2x} + \ln|C|;$$

de aquí, potenciando, obtenemos:

$$y - 3 = Ce^{2x}.$$

Hallamos el valor de C por las condiciones $x = 0$ e $y = 4$; haciendo la sustitución, se tendrá:

$$4 - 3 = C \cdot e^0 = C \cdot 1,$$

o sea,

$$C = 1.$$

Así, pues, $y - 3 = e^{2x}$, o

$$y = e^{2x} + 3.$$

EJEMPLO 3. Una esfera metálica que, al comenzar un experimento, tenía 12° de temperatura se enfría hasta 0° por un chorro de agua. A los 8 min, la esfera se había enfriado hasta 9°. Considerando que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del agente refrigerante, hallar:

1) ¿cuánto tiempo tardará la esfera en enfriarse hasta la temperatura de 7°?

2) ¿cuál será la temperatura de la esfera a los 30 min de haber empezado el enfriamiento?

SOLUCIÓN. Designemos con T la temperatura de la esfera y con t, el tiempo transcurrido desde el comienzo del experimento; entonces la velocidad de enfriamiento será igual a la derivada $\frac{dT}{dt}$. De acuerdo con las condiciones

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 0) = kT,$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad. Separando las variables, obtendremos:

$$\frac{dT}{T} = k\,dt,$$

de donde (aquí $T > 0$ y, por lo tanto, en el logaritmo se omite el signo de magnitud absoluta)

$$\ln T = kt + \ln C,$$

o

$$\ln T = \ln e^{kt} + \ln C,$$

o, por último, después de la potenciación

$$T = Ce^{kt}. \tag{2}$$

Para hallar las constantes C y k, utilizamos los datos del problema:

si $t = 0$, la temperatura de la esfera $T = 12°$,

si $t = 8$, la temperatura de la esfera $T = 9°$.

Sustituyendo en la igualdad (2) t y T por sus valores, obtendremos:

$$12 = Ce^0 \quad \text{y} \quad 9 = Ce^{8k}.$$

De la primera igualdad tenemos $C = 12$, y de la segunda

$$e^{8k} = 0{,}75. \tag{3}$$

Para calcular e^k, hallemos la raíz de octavo grado de ambos miembros de la igualdad (3):

$$e^k = \sqrt[8]{0{,}75} = (0{,}75)^{\frac{1}{8}}.$$

Elevemos a la potencia t ambos miembros de la igualdad obtenida:

$$e^{kt} = (0{,}75)^{\frac{t}{8}}.$$

Sustituyendo en la igualdad (2) C y e^{kt} por sus valores hallados, se tendrá:

$$T = 12 \cdot (0{,}75)^{\frac{t}{8}}. \tag{4}$$

Para responder la primera pregunta del problema, calculemos el logaritmo decimal de la igualdad (4):

$$\log T = \log 12 + \frac{t}{8} \log 0{,}75 \tag{5}$$

y supongamos $T = 7$ en la igualdad obtenida:

$$\log 7 = \log 12 + \frac{t}{8} \log 0{,}75,$$

de donde

$$t = \frac{8(\log 7 - \log 12)}{\log 0{,}75} = \frac{8(0{,}8451 - 1{,}0792)}{\bar{1}{,}8751} =$$

$$= \frac{-8 \cdot 0{,}2341}{-0{,}1249} = \frac{1{,}8728}{0{,}1249} \approx 15 \text{ min.}$$

Para responder la segunda pregunta del problema, supongamos $t = 30$ en la igualdad (5):

$$\log T = \log 12 + \frac{15}{4} \log 0{,}75 = 1{,}0792 + \frac{15}{4} \cdot \bar{1}{,}8751 =$$

$$= 1{,}0792 + \frac{15}{4}(-0{,}1249) = 1{,}0792 - 0{,}4684 = 0{,}6108,$$

de donde

$$T \approx 4°.$$

Ejercicios

Hallar las soluciones particulares de las ecuaciones:

1. $ds = (4t - 3)\,dt$,	si cuando $t = 0$	$s = 0$.
2. $dx = (2t^2 - 5)\,dt$,	si cuando $t = 1$	$x = -4$.
3. $x\,dx = dy$,	si cuando $x = 1$	$y = 0$.
4. $x\,dx = y\,dy$,	si cuando $x = 2$	$y = 1$.
5. $x^3\,dx + y\,dy = 0$,	si cuando $x = 0$	$y = 1$.
6. $(t - 1)\,dt + s\,ds = 0$,	si cuando $t = 2$	$s = 0$.
7. $\frac{2dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$,	si cuando $x = 1$	$y = \sqrt{2}$.
8. $\frac{dy}{2x} + \frac{dx}{y} = 0$,	si cuando $x = 0$	$y = 2$.
9. $2s\,dt = t\,ds$,	si cuando $t = 1$	$s = 2$.
10. $x^2\,dy - y^2\,dx = 0$,	si cuando $x = 0{,}2$	$y = 1$.
11. $x^3\,dy = y^3\,dx$,	si cuando $x = \sqrt{3}$	$y = \sqrt{2}$.
12. $\frac{2\,dy}{dx} = 1 + x^2$,	si cuando $x = 0$	$y = 0$.
13. $dy + x\,dx = 2\,dx$,	si cuando $x = 1$	$y = 1{,}5$.

14. $x^2\,dy - \frac{1}{2}\,y^3\,dx = 0$ si cuando $x = -1$ $y = 1$.

15. $(t + 1)\,dx = 2x\,dt$, si cuando $t = 1$ $x = 4$.

16. $\sqrt{x}\,dy - \sqrt{y}\,dx = 0$, si cuando $x = 0$ $y = 0$.

17. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, si cuando $x = 0$ $y = 1$.

18. $\frac{dy}{2y} - dx = 0$, si cuando $x = 0$ $y = 3$.

19. $(1 + y)\,dx - (1 - x)\,dy = 0$, si cuando $x = 0$ $y = 1$.

20. $2y' = y$, si cuando $x = 0$ $y = 1$.

21. $\frac{2x - 1}{y + 1} = \frac{dx}{dy}$, si cuando $x = 5$ $y = 0$.

22. $\operatorname{tg} x \cdot y' = 1 + y$, si cuando $x = \frac{\pi}{6}$ $y = -\frac{1}{2}$.

23. $(1 - x^2)\,\frac{dy}{dx} + xy = 0$, si cuando $x = 0$ $y = 4$.

24. $dy + y \operatorname{tg} x\,dx = 0$, si cuando $x = 0$ $y = 1$.

25. $\cos x \operatorname{sen} y\,dy -$
$- \cos y \operatorname{sen} x\,dx = 0$, si cuando $x = \pi$ $y = \pi$.

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones:

26. $(xy + x)\,\frac{dx}{dy} = 1$. 27. $(xy^2 + x)\,dx + (x^2y - y)\,dy = 0$.

28. $(y - x^2y)\,dy + (x + xy^2)\,dx = 0$.

29. $(1 + x^2)\,dy - (xy + x)\,dx = 0$.

30. $y\,dx + (1 - y)\,x\,dy = 0$. 31. $x^2\,dy + (y - 1)\,dx = 0$.

32. $2(xy + y)\,dx = x\,dy$. 33. $(x^2 + 1)\,dy = y\,dx$.

34. $x^2y' - 2xy = 3y$.

35. Un cuerpo se desplaza por el eje de abscisas, partiendo del punto $A(10; 0)$, a la velocidad

$$v = 2t - t^2.$$

Hallar la ecuación del movimiento del cuerpo.

36. Escribir la ecuación de una línea que pase por el punto $A(-1; 0)$ y cuya tangente tenga el coeficiente angular igual a 2 en cualquier punto.

37. Hallar la ecuación de una curva que pase por el punto $A(3; 1)$ y tenga una tangente con el coeficiente angular igual a $2x - 1$.

38. Hallar la ecuación de una curva que pase por el punto $A(4; 4)$ y tenga una tangente con el coeficiente angular igual a $k = \frac{2}{y}$.

39. Escribir la ecuación de una curva que pase por el punto $A\left(-1;\ \frac{1}{e}\right)$ y tenga una tangente con el coeficiente angular $k = y$.

40. Las coordenadas de los puntos de cierta curva están relacionadas por la ecuación

$$xy = (x + 1)\, y.$$

Escribir la ecuación de esta curva si pasa por el punto $A(1;\ e)$.

41. Un cuerpo se desplaza por una curva que tiene una tangente con el coeficiente angular $k = x^2$. Hallar la variación de la ordenada del punto al variar la abscisa desde 2 hasta 5.

42. La velocidad v de un cuerpo lanzado hacia abajo a la velocidad inicial v_0 se determina por la igualdad $v = v_0 + gt$, donde t es el tiempo, y g, la aceleración del movimiento del cuerpo. Hallar la ecuación de movimiento de este cuerpo.

43. Un cuerpo, cuya temperatura es de 25°, se ha colocado en un termostato mantenido a 0°. Sabiendo que la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio ambiente, determinar cuánto tardará el cuerpo en enfriarse hasta 10°, si en 20 min se enfría hasta 20°.

44. Si la temperatura del aire es igual a 20° y un cuerpo, colocado en este aire, se enfría desde 100° hasta 60° en el curso de 20 min, ¿cuánto tardará en enfriarse hasta 30°? (Véase la ley del enfriamiento en el problema No 43.)

45. La temperatura del aire es de 15°. Este aire enfrió cierto cuerpo desde 80° hasta 50° en el curso de 10 min. ¿Cuál será la temperatura del cuerpo una hora después de efectuada la medición inicial? (La ley del enfriamiento se ofrece en el problema No 43.)

46. Un cuerpo mantenido en aire de 18° de temperatura se enfrió desde 90° hasta 54° en 25 min. ¿Cuál será la temperatura del cuerpo 1 hora 15 min después de efectuada la medición inicial? (La ley del enfriamiento se ofrece en el problema No 43.)

47. Un disco que gira en un líquido retarda su velocidad angular a causa de la fricción. Se sabe que esta última es proporcional a la velocidad angular. Determinar a qué velocidad girará el disco en el instante $t = 4$ min, si cuando $t = 0$ daba 120 rpm y cuando $t = 1{,}80$ rpm.

48. Un disco comenzó a rotar en un líquido a la velocidad de 3 rev/s, si al cabo de 1 min su velocidad es de 2 rev/s, ¿cuál será 3 min después de iniciar la rotación? (Véase el problema No 47.)

49. Un disco que había comenzado a girar en un líquido a la velocidad de 5 rev/s a los 2 min hacía 3 rev/s. ¿Cuánto tardará, a partir del comienzo de la rotación, en tener una velocidad de 1 rev/s? (Véase el problema No 47.).

50. Durante la fermentación, la velocidad del incremento del fermento activo es proporcional a su cantidad existente. Si la cantidad inicial es de 1 g, al cabo de una hora alcanza 1,2 g. ¿A cuántos gramos llegará 5 horas después de comenzar la fermentación?

51. Al cabo de 2 horas de fermentación, la cantidad de fermento es de 2 g, y al cabo de 3,3 g. ¿Cuál era la cantidad inicial de fermento? (Véase el problema No 50.)

§ 124. Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden. *La ecuación de la forma*

$$P\,dx + Q\,dy = 0, \tag{1}$$

*donde P y Q son funciones homogéneas *) de la misma potencia de x e y, se llama ecuación diferencial homogénea de primer orden.*

Mostremos, en un ejemplo, cómo se resuelve tal ecuación.

EJEMPLO. Resolver la ecuación

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

SOLUCIÓN. Reduzcamos la ecuación (2) a la forma (1), multiplicando sus dos miembros por dx.

Obtendremos:

$$y^2\,dx + x^2\,dy = xy\,dy,$$

o

$$y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0. \tag{3}$$

En la ecuación (3)

$$P = y^2 \text{ y } Q = x^2 - xy.$$

Como se ve, P y Q son funciones homogéneas de x e y; además, ambas de segundo orden; por lo tanto, la ecuación (2) es homogénea.

De la ecuación (2) hallamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}. \tag{4}$$

Supongamos

$$y = zx, \tag{5}$$

donde z es una nueva función de x. Hallando z, tendremos, de la igualdad (5), la función buscada y.

---

*) Un polinomio se llama homogéneo respecto a x e y si todos sus términos tienen la misma potencia. Por ejemplo, los polinomios $x^2y - xy^2$, $2x^2 - 3xy$, $5x + 4y + \sqrt{x^2 + y^2}$ son homogéneos: el primero de tercer orden, el segundo de segundo orden y el tercero de primer orden.

Para hallar z, diferenciemos respecto a x la igualdad (5) aplicando la regla (IV) del § 70;

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}. \tag{6}$$

Sustituyamos en la ecuación (4) los valores de y y $\frac{dy}{dx}$ tomados de las igualdades (5) y (6); obtendremos:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2x^2}{zx^2 - x^2},$$

o

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{z-1}.$$

De aquí

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{z-1} - z,$$

o

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{z-1}.$$

Efectuando la separación de las variables en la ecuación obtenida, anotaremos

$$\frac{z-1}{z}dz = \frac{dx}{x},$$

o

$$\left(1 - \frac{1}{z}\right)dz = \frac{dx}{x}.$$

De aquí

$$\int\left(1 - \frac{1}{z}\right)dz = \int\frac{dx}{x}.$$

Después de la integración se tendrá

$$z - \ln|z| = \ln|x| + \ln|C|. \tag{7}$$

Representemos z en la forma

$$z = \ln e^z.$$

Ahora, la ecuación (7) tomará la forma

$$\ln e^z - \ln |z| = \ln |x| + \ln |C|,$$

o

$$e^z = Czx. \tag{8}$$

De la igualdad (5) hallamos

$$z = \frac{y}{x}.$$

Sustituyendo, en la igualdad (8), z por su valor hallado, obtendremos

$$e^{\frac{y}{x}} = C \cdot \frac{y}{x} \cdot x$$

o

$$e^{\frac{y}{x}} = Cy. \tag{9}$$

La ecuación (9) es la solución general de la (2).

Para comprobar si la solución es correcta, diferenciemos respecto a x ambos miembros de la ecuación (9). Considerando $e^{\frac{y}{x}}$ como función compuesta, aplicamos la regla de diferenciación (XVII) del § 81, y al miembro derecho, la (V) del § 71. Obtendremos

$$e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x}\right)' = Cy'.$$

Por la regla (VI) del § 72

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2}.$$

Por consiguiente,

$$e^{\frac{y}{x}} \frac{xy' - y}{x^2} = Cy'. \tag{10}$$

La ecuación (10) contiene la constante C que debe ser excluida de la misma. Para ello, de la ecuación (9) hallamos

$$C = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{y}$$

y en la ecuación (10) sustituimos C por su valor, obteniéndose:

$$e^{\frac{y}{x}}\frac{xy'-y}{x^2}=y'\cdot\frac{e^{\frac{y}{x}}}{y}\quad\text{ó}\quad\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{y'}{y}.$$

Despejando y' en esta ecuación, hallaremos

$$y'=\frac{y^2}{xy-x^2}.$$

Hemos obtenido la ecuación inicial (4).

Ejercicios

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones:

1. $(x+y)\,dx+x\,dy=0$. **2.** $(x-y)\,y\,dx=x^2\,dy$. **3.** $y'=\frac{x^2+y^2}{xy}$. **4.** $xy^2\,dy=(x^3+y^3)\,dx$. **5.** $(x^2-2y^2)\,dx+2xy\,dy=0$.

6. $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$. **7.** $x\,dy-y\,dx=y\,dy$. **8.** $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+1$. **9.** $y'=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}$. **10.** $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$.

Hallar las soluciones particulares de las ecuaciones:

11. $y'=\frac{2x+y}{2x}$, si $y=0$ cuando $x=1$.

12. $y'=\frac{xy+y^2}{x^2}$, si $y=1$ cuando $x=1$.

13. $y'=\frac{y^2}{x^2+xy}$, si $y=2$ cuando $x=2$.

§ 125. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. *La ecuación de la forma*

$$y'+py=q, \tag{1}$$

donde p y q son funciones de x o magnitudes constantes, se llama ecuación diferencial lineal de primer grado.

Cuando esta ecuación tiene la forma general, no pueden separarse las variables. Sin embargo, utilizando un procedimiento especial, puede transformarse en ecuación de va-

riables separadas; hecho esto, la ecuación lineal se resuelve fácilmente. Basándonos en un ejemplo, mostremos cómo se hace.

EJEMPLO. Resolver la ecuación

$$\frac{y'}{x} - 2y = (1 - x^2)\, e^{x^2}.$$

SOLUCIÓN. En primer lugar, es necesario reducirla a la forma (1); para ello, multipliquemos por x ambos miembros. Obtendremos

$$y' - 2xy = (x - x^3)\, e^{x^2}. \tag{2}$$

Supongamos

$$y = uz, \tag{3}$$

donde u y z son nuevas funciones de x. Nuestra tarea consiste en hallar estas funciones, para después hallar la función y de la igualdad (3). Diferenciemos respecto a x la igualdad (3), aplicando la regla (IV) del § 70:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}. \tag{4}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) y' e y por sus valores tomados de (3) y (4), se tiene

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - 2xuz = (x - x^3)\, e^{x^2}.$$

Si, por ejemplo, se quiere hallar primero la función z, es necesario reunir todos los términos que contienen la función u y sacar esta función fuera de paréntesis. Tendremos:

$$u\left(\frac{dz}{dx} - 2xz\right) + z\frac{du}{dx} = (x - x^3)\, e^{x^2}. \tag{5}$$

Hallemos ahora una función z tal, que convierta en cero el primer paréntesis de la igualdad (5), es decir, que

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = 0. \tag{6}$$

Si se verifica esta condición, la igualdad (5) se transformará en la siguiente:

$$z\frac{du}{dx} = (x - x^3)\, e^{x^2}. \tag{7}$$

Separando variables en la ecuación (6), anotaremos

$$\frac{dz}{z} = 2x\,dx. \tag{8}$$

De aquí

$$\int \frac{dz}{z} = \int 2x\,dx,$$

o, después de la integración,

$$\ln|z| = x^2 + \ln|C|. \tag{9}$$

Conforme a la definición del logaritmo

$$x^2 = \ln e^{x^2},$$

por lo que la ecuación (9) tomára la forma

$$\ln|z| = \ln e^{x^2} + \ln|C|,$$

de donde

$$z = Ce^{x^2}.$$

Necesitamos una de las soluciones particulares de la ecuación (8). Elijamos la más simple; para ello, supongamos la constante arbitraria $C = 1$. El resultado será

$$z = e^{x^2}. \tag{10}$$

Sustituyendo el valor hallado de z en la ecuación (7), obtendremos

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} = (x - x^3)\,e^{x^2},$$

o

$$\frac{du}{dx} = x - x^3.$$

Esta ecuación es también de variables separadas. Resolviéndola hallaremos

$$u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C. \tag{11}$$

Sustituyendo en la igualdad (3) los valores de z y u tomados de las igualdades (10) y (11), obtendremos la solución general de la ecuación (2)

$$y = uz = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C\right) e^{x^2}.$$

La solución se comprueba de la misma forma que en el ejemplo del § 124.

Ejercicios

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones:

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$. 2. $y' = \frac{y}{x} - 1$. 3. $y' + \frac{2y}{x} = x^2$. 4. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$. 5. $y' - \frac{n}{x} y = e^x x^n$. 6. $xy' + y = e^{-x}$. 7. $\frac{ds}{dt} \cos t + s \operatorname{sen} t = 1$. 8. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y}{x}$. 9. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 10. $y' = \frac{y + 1}{x}$. 11. $y' - \frac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3$. 12. $x^2 y' = 2xy - 3$. 13. $(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2$. 14. $x(y' - y) = (1 + x^2) e^x$. 15. $y' - \frac{y}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Hallar las soluciones particulares de las ecuaciones:

16. $xy' + y = 3$, si $y = 0$ cuando $x = 1$.
17. $y' - 2y + 3 = 0$, si $y = 1$ cuando $x = 0$.
18. $xy' - 2y = x^3 e^x$, si $y = 0$ cuando $x = 1$.
19. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, si $y = 0$ cuando $x = 0$.
20. $xy' + y = x + 1$. si $y = 3$ cuando $x = 2$.

§ 126. Ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$.

La ecuación que contiene derivadas o diferenciales de segundo orden se llama *ecuación diferencial de segundo orden*. La más simple de estas ecuaciones tiene la forma $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$; se resuelve mediante doble integración.

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la definición de la segunda derivada, puede anotarse

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dx}.$$

Supongamos ahora

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dp}{dx},$$

y la ecuación dada se transcribirá de la forma siguiente

$$\frac{dp}{dx} = 1 - 2x,$$

o

$$dp = (1 - 2x)\,dx.$$

Integrando esta última igualdad, hallaremos:

$$\int dp = \int (1 - 2x)\,dx$$

y

$$p = x - x^2 + C_1.$$

Pero

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + C_1$$

o

$$dy = (x - x^2 + C_1)\,dx.$$

Integrando otra vez, se tiene

$$y = \int (x - x^2 + C_1)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2. \qquad (1)$$

Hemos hallado la solución general de la ecuación dada.

Para obtener su solución particular, es necesario determinar los valores numéricos de las constantes C_1 y C_2; esto requiere que se tengan las condiciones iniciales. Supongamos que la curva definida por la solución particular pasa, por ejemplo, por los puntos con las coordenadas $(0; 1)$ y $\left(1; \frac{1}{6}\right)$; entonces, sustituyendo los valores de x e y en la ecuación (1), obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones respecto a C_1 y C_2:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{0}{2} - \frac{0}{3} + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ \frac{1}{6} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + C_1 + C_2. \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$C_1 = -1 \text{ y } C_2 = 1.$$

Por consiguiente, la solución particular de la ecuación diferencial dada para las condiciones iniciales indicadas será:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1.$$

Para comprobar si la ecuación ha sido resuelta correctamente, hallemos la segunda derivada de esta función:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = x - x^2 - 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (x - x^2 - 1)' = 1 - 2x.$$

Hemos llegado a la ecuación inicial, lo que indica que ha sido resuelta correctamente.

En este ejemplo, las condiciones iniciales se dieron en forma de coordenadas de dos puntos de una curva definida por la solución particular de una ecuación diferencial. Pero, las condiciones iniciales pueden venir dadas de otra forma, por ejemplo, si $x = x_0$, $y = y_0$ e $y' = y'_0$. Esto significa que se dan un punto de la curva y el sentido de la tangente en este punto.

EJEMPLO 2. La aceleración del movimiento rectilíneo de un cuerpo es de 2 cm/s². Expresar el espacio s recorrido por el cuerpo en función del tiempo t.

SOLUCIÓN. Conforme al concepto mecánico de la segunda derivada de una función (§ 85), se tiene

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2.$$

Designando

$$\frac{ds}{dt} = p,$$

anotaremos:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{dp}{dt} = 2,$$

de donde

$$dp = 2\,dt$$

y

$$p = 2t + C_1.$$

Sustituyendo p por su expresión, obtendremos:

$$\frac{ds}{dt} = 2t + C_1, \tag{2}$$

o

$$ds = (2t + C_1)\,dt,$$

de aquí

$$s = \int (2t + C_1)\,dt = t^2 + C_1 t + C_2. \tag{3}$$

Para obtener la solución particular se necesitan las condiciones iniciales. Si cuando $t = 0$, $s = 0$ y $\frac{ds}{dt} = 0$ (suponemos que en el instante inicial del movimiento el espacio s y la velocidad $\frac{ds}{dt}$ son nulos). Sustituyendo por ceros t, s y $\frac{ds}{dt}$ en las ecuaciones (2) y (3), obtendremos:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0.$$

Así, pues, la dependencia buscada será $s = t^2$.

Ejercicios

Hallar las soluciones particulares de las ecuaciones:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, si cuando $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix}$ y cuando $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 0. \end{matrix}$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$, si cuando $\begin{matrix} x = 2 \\ y = 5 \end{matrix}$ y cuando $\begin{matrix} x = 4 \\ y = 11. \end{matrix}$

3. $y_x'' = x$, si cuando $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \end{matrix}$ y cuando $\begin{matrix} x = 2 \\ y = 2. \end{matrix}$

4. $\frac{d^2s}{dt^2} = t + 1$, si cuando $\begin{matrix} t = 0 \\ s = 2 \end{matrix}$ y $\frac{ds}{dt} = -\frac{11}{6}$.

5. $\frac{d^2\theta}{d\omega^2} = \omega^2$, si cuando $\begin{matrix} \omega = 0 \\ \theta = 0 \end{matrix}$ y $\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{3}{4}$.

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones

6. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 2$. 7. $\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} = e^{\varphi}$. 8. $y_x'' = \cos x$.

9. $\frac{d^2s}{dt^2} = 1 - \operatorname{sen} t$. 10. $e^x \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}$. 11. $\frac{d^2S}{dt^2} = e^{2t}$.

12. Hallar la ecuación del movimiento de un punto pesado lanzado verticalmente hacia arriba a la velocidad inicial v_0.

13. La aceleración del movimiento rectilíneo de un cuerpo se determina por la igualdad $j = t^2 + t$. Hallar la ley del movimiento del cuerpo si en el instante $t = 1$ su velocidad $v = 2$ y el recorrido $S = 4$.

14. Un cuerpo se desplaza en línea recta, siendo su aceleración $j = 6t - 4$, la velocidad inicial $v_0 = 4$ y el espacio $S = 0$ cuando $t = 0$. Hallar:
1) la velocidad y el espacio recorrido en función del tiempo t,
2) el espacio, la velocidad y la aceleración en el instante $t = 3$,
3) el instante de tiempo en que la velocidad alcanza el mínimo.

15. La aceleración del movimiento rectilíneo es proporcional al tiempo. Hallar la dependencia entre la distancia recorrida y el tiempo si cuando $t = 0$, $v = 0$ y $S = 0$ y cuando $t = 1$, $S = \frac{1}{3}$.

16. La aceleración del movimiento rectilíneo es proporcional al cuadrado del tiempo. Hallar la dependencia entre la distancia recorrida y el tiempo si cuando $t = 0$, $v = 0$ y $S = 1$, y cuando $t = 1$, $S = 2$.

§ 127. Ecuaciones diferenciales homogéneas lineales de segundo orden con coeficientes constantes. *La ecuación de la forma*

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

donde p y q son magnitudes constantes, y f(x), función continua de x, se llama ecuación diferencial lineal de segundo grado con coeficientes constantes.

En lugar de la función $f(x)$, el miembro derecho de la ecuación (1) puede ser igual a cero; en este caso, obtendremos la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2}$$

denominada *homogénea*. La ecuación (1) recibe el nombre de *no homogénea*.

Ocupémonos del análisis de la ecuación homogénea (2).

TEOREMA 1. *Si $y = y_1$ es solución de la ecuación (2), entonces $y = ay_1$, donde a es un factor constante, también será solución de esta ecuación.*

DEMOSTRACIÓN. Hallemos la primera y la segunda derivadas de la función $y = ay_1$:

$$y' = (ay_1)' = ay_1',$$
$$y'' = (ay_1')' = ay_1''.$$

Sustituyendo en la ecuación (2) y'', y' e y por sus valores, obtendremos:

$$ay_1'' + pay_1' + qay_1 = a(y_1'' + py_1' + qy_1)) = 0. \tag{3}$$

Según la condición $y = y_1$ satisface la ecuación (2); entonces,

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0,$$

y, por lo tanto, la igualdad (3) es una identidad, o sea, $0=0$. Pero esto significa que ay_1 es solución de la ecuación (2).

TEOREMA 2. *Si $y = y_1$ e $y = y_2$ son soluciones de la ecuación (2), la suma $y = y_1 + y_2$ también será su solución.*

DEMOSTRACIÓN. Hallemos la primera y la segunda derivadas de la función $y = y_1 + y_2$:

$$y' = y_1' + y_2',$$

e

$$y'' = y_1'' + y_2''.$$

En la ecuación (2) sustituyamos y'', y' e y por sus valores:

$$y_1'' + y_2'' + p(y_1' + y_2') + q(y_1 + y_2) =$$
$$= (y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0. \tag{4}$$

Por la condición $y = y_1$ e $y = y_2$ son soluciones de la ecuación (2); por consiguiente, satisfacen esta ecuación y, por lo tanto,

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

e

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Así, pues, la igualdad (4) es una identidad, o sea, $0 = 0$, y por ello $y = y_1 + y_2$ es solución de la ecuación (2).

Como se sabe, las soluciones $y = y_1$ e $y = y_2$ se llaman particulares, que pueden ser *linealmente dependientes* y *linealmente independientes*.

DEFINICIÓN. *Dos soluciones particulares de la ecuación* (2) *se denominan linealmente dependientes si una de ellas puede obtenerse multiplicando la otra por un factor constante cualquiera; en caso contrario, las soluciones particulares se llaman linealmente independientes.*

Por ejemplo, la ecuación

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \tag{5}$$

tiene soluciones particulares de dos tipos:

$$y = e^{2x} \quad \text{e} \quad y = e^{3x}$$

(más adelante expondremos cómo hallar estas soluciones). Si se toma e^{2x} y se multiplica por 5, obtendremos $5e^{2x}$ que es también una solución particular (teorema 1); de acuerdo con la definición, $y = e^{2x}$ e $y = 5e^{2x}$ son soluciones particulares linealmente dependientes, mientras que las soluciones $y = e^{2x}$ e $y = e^{3x}$ son linealmente independientes, por cuanto cualquiera que sea el factor constante a se verifica $e^{3x} \neq ae^{2x}$.

TEOREMA 3. *Si* $y = y_1$ e $y = y_2$ *son soluciones particulares de la ecuación* (2) *linealmente independientes, su solución general será*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{6}$$

donde C_1 y C_2 *son constantes arbitrarias.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrarlo, se puede emplear el procedimiento utilizado en los teoremas 1 y 2. Sin embargo, es más sencillo actuar del siguiente modo. De acuerdo con la condición, y_1 e y_2 son soluciones particulares de la ecuación (2); entonces, C_1y_1 y C_2y_2 son también sus soluciones (teo-

rema 1) y, por lo tanto, su suma es también solución de dicha ecuación (teorema 2).

Hay que hacer notar que la solución general de la ecuación diferencial (2) debe contener dos constantes arbitrarias, y esto puede tener lugar sólo si en la solución (6) entran dos soluciones particulares linealmente independientes; en caso contrario, habrá una sola constante arbitraria y la solución no será general, sino particular. Expliquemos lo dicho tomando un ejemplo. Volviendo a la ecuación (5), anotaremos su siguiente solución:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 a e^{2x}, \tag{7}$$

que contiene dos soluciones particulares linealmente dependientes, e^{2x} y ae^{2x}. Transformando (7), obtendremos:

$$y = (C_1 + aC_2)\, e^{2x} = Ce^{2x}, \tag{8}$$

donde $C_1 + aC_2 = C$. Como se ve, la solución (8), equivalente a la (7), contiene una constante arbitraria C, aparecida gracias a la fusión de C_1 y aC_2, por lo que no será solución general, sino particular, de la ecuación (2). En efecto, la solución (8) no incluye todas las soluciones particulares de la ecuación (2), faltan las soluciones de la forma e^{3x}.

De lo dicho se deduce que para obtener la solución general de la ecuación (2) se requiere saber hallar sus soluciones linealmente independientes particulares.

En los cursos completos de análisis matemático se demuestra que las soluciones linealmente independientes particulares de la ecuación (2) son funciones de la forma

$$y = e^{kx}, \tag{9}$$

donde k es el número constante que debe hallarse para una u otra ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden.

Si $y = e^{kx}$ es una solución particular de la ecuación (2), debe satisfacer esta ecuación para cierto valor de k. Este valor se halla diferenciando la función $y = e^{kx}$.

$$y' = (e^{kx})' = ke^{kx},$$

$$y'' = (ke^{kx})' = k^2 e^{kx};$$

sustituyamos en la ecuación (2) y'', y' e y por sus valores; obtendremos:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

o

$$(k^2 + pk + q)\,e^{kx} = 0.$$

Como $e^{kx} \neq 0$, evidentemente

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{10}$$

Resolviendo la ecuación (10) se tendrán dos valores de k que sustituiremos en la función (9).

De este modo, hallaremos dos soluciones linealmente independientes particulares de la ecuación (2):

$$y = e^{k_1x} \text{ e } y = e^{k_2x}.$$

La ecuación (10) se llama *ecuación característica* de la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

Observemos que para formar la ecuación característica, basta sustituir, en la ecuación (2), y'', y' e y por k^2, k y 1.

Examinemos tres casos de solución de la ecuación (2).

PRIMER CASO. Las raíces de la ecuación característica son reales y de distinto valor. Por consiguiente, la ecuación (2) tiene dos soluciones particulares linealmente independientes: $y = e^{k_1x}$ e $y = e^{k_2x}$, y, por lo tanto, su solución general será:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación $y'' - 5y' + 6y = 0$.

SOLUCIÓN. Las soluciones particulares de esta ecuación las hemos utilizado ya; ahora, mostremos cómo se hallan. Escribamos la ecuación característica

$$k^2 - 5k + 6 = 0,$$

de donde

$$k_1 = 2 \text{ y } k_2 = 3.$$

Así, pues, para la ecuación dada las soluciones particulares linealmente independientes serán

$$y = e^{2x} \text{ e } y = e^{3x},$$

y su solución general se anotará así:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

SEGUNDO CASO. Las raíces de la ecuación característica son reales e iguales, o sea, $k_1 = k_2$. Hallamos una solución particular:

$$y = e^{k_1 x}.$$

Se puede demostrar que la segunda solución particular será

$$y = xe^{k_1 x}.$$

Mostremos esto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 0$.

SOLUCIÓN. Resolviendo la ecuación característica

$$k^2 + 4k + 4 = 0,$$

hallamos:

$$k_1 = k_2 = -2.$$

Una solución particular $y = e^{-2x}$, y la otra $y = xe^{-2x}$.

Comprobemos si $y = xe^{-2x}$ satisface la ecuación dada. Para ello, hallamos:

$$y' = (xe^{-2x})' = e^{-2x}x' + x(e^{-2x})' = e^{-2x} - 2xe^{-2x}.$$

$$y'' = (e^{-2x} - 2xe^{-2x})' = (e^{-2x})' - e^{-2x}(2x)' - 2x(e^{-2x})' =$$

$$= -2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x} = -4e^{-2x} + 4xe^{-2x}.$$

Sustituimos los valores y'', y' e y en la ecuación:

$$-4e^{-2x} + 4xe^{-2x} + 4e^{-2x} - 8xe^{-2x} + 4xe^{-2x} = 0; \quad 0 = 0.$$

La identidad obtenida muestra que $y = xe^{-2x}$ es la segunda solución particular de la ecuación diferencial dada.

Así, pues, hemos hallado dos soluciones particulares para la ecuación dada:

$$y = e^{-2x} \text{ e } y = xe^{-2x},$$

que son linealmente independientes; por este motivo, la solución general de esta ecuación será

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 xe^{-2x} = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x}.$$

TERCER CASO. Las raíces de la ecuación característica son complejas, a saber:

$$k_1 = a + bi \quad y \quad k_2 = a - bi. \tag{11}$$

Las soluciones particulares de la ecuación (2) serán

$$y_1 = e^{(a+bi)x} \quad e \quad y_2 = e^{(a-bi)x}. \tag{12}$$

Sin embargo, estas soluciones se pueden transformar en expresiones *que no contienen magnitudes imaginarias.*

Representemos la función (12) de la siguiente forma:

$$y_1 = e^{ax+bxi} = e^{ax}e^{bxi},$$

$$y_2 = e^{ax-bxi} = e^{ax}e^{-bxi}.$$

Sumemos estas igualdades y, luego, restemos de la primera la segunda; obtendremos:

$$y_1 + y_2 = e^{ax}(e^{bxi} + e^{-bxi}),$$

$$y_1 - y_2 = e^{ax}(e^{bxi} - e^{-bxi}).$$

Multipliquemos por $\frac{1}{2}$ la primera de las igualdades obtenidas y por $\frac{1}{2i}$, la segunda:

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + y_2}{2} &= e^{ax}\frac{e^{bxi} + e^{-bxi}}{2}, \\ \frac{y_1 - y_2}{2i} &= e^{ax}\frac{e^{bxi} - e^{-bxi}}{2i}. \end{aligned} \tag{13}$$

De acuerdo con las fórmulas de Euler *) se tiene

$$\frac{e^{bxi} + e^{-bxi}}{2} = \cos bx,$$

$$\frac{e^{bxi} - e^{-bxi}}{2i} = sen\ bx,$$

*) En el § 139 se demostrarán las fórmulas de Euler:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

por lo que las igualdades (13) tomarán la forma:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax} \cos bx,$$
$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax} \operatorname{sen} bx; \tag{14}$$

$y_1 + y_2$ e $y_1 - y_2$ son soluciones particulares de la ecuación (2) (teorema 2); $\frac{y_1 + y_2}{2}$ e $\frac{y_1 - y_2}{2i}$ son también soluciones particulares de esa ecuación (teorema 1).

Así, pues, hemos hallado dos soluciones particulares de la ecuación (2) representadas por las igualdades (14); además, estas soluciones son linealmente independientes. Por consiguiente, la solución general de la ecuación (2) se anotará en la forma

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \operatorname{sen} bx =$$
$$= e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \operatorname{sen} bx). \tag{15}$$

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación $y'' - 6y' + 13y = 0$.

SOLUCIÓN. La ecuación característica

$$k^2 - 6k + 13 = 0$$

tiene las raíces $k_1 = 3 + 2i$ y $k_2 = 3 - 2i$.

Comparándolas con (11), se tiene

$$a = 3 \text{ y } b = 2.$$

Por consiguiente, las soluciones particulares de la ecuación dada serán

$$y = e^{3x} \cos 2x \text{ e } y = e^{3x} \operatorname{sen} 2x,$$

y la solución general

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x).$$

Ejercicios

1. Demostrar que la función

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, es la solución general de la ecuación

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

2. Demostrar que la función

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, es la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

3. $y'' - y = 0$. **4.** $y'' = 4y$. **5.** $y'' - 4y' + 3y = 0$.

6. $y'' + y' - 2y = 0$. **7.** $y'' - 2y' + y = 0$. **8.** $y'' - 6y' + 9y = 0$.

9. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$. **10.** $y'' + 2y' + 2y = 0$. **11.** $y'' + 4y' + 8y = 0$.

12. $y'' + y = 0$. **13.** $y'' + 16y = 0$.

Hallar las soluciones particulares de las siguientes ecuaciones:

14. $y'' - 9y = 0$, si para $x = 0$, $y = 2$ e $y' = 6$.

15. $y'' + 3y' + 2y = 0$, si para $x = 0$, $y = -1$ e $y' = 3$.

16. $y'' + 6y' + 9y = 0$, si para $x = 0$, $y = 2$ e $y' = 1$.

17. $\frac{d^2S}{dt^2} + 2\frac{dS}{dt} + 5S = 0$, si para $t = 0$, $S = 1$ y $\frac{dS}{dt} = 1$.

18. $y'' - 2y' + 2y = 0$, si para $x = 0$, $y = 1$ e $y' = 3$.

19. La aceleración de un punto viene dada por la igualdad $j = -\frac{5}{4}S - v$, donde v es la velocidad del punto, y S, el espacio recorrido por él. Hallar la ecuación del movimiento del punto si cuando $t = 0$, $S = 0$ y $v = 2$.

Suplemento

•

Capítulo XIV
Series

§ 128. Concepto de las series. *La expresión de la forma*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

donde u_1, u_2, u_3, ... *son términos de cierta sucesión infinita se denomina serie infinita o, simplemente, serie.*

El término u_n recibe el nombre de *término general* de la serie.

Designemos con S_n la suma de los n primeros términos de la serie (1), es decir,

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n.$$

La suma S_n se llama *suma parcial* de la serie. Si n varía, S_n también varía; además son posibles dos casos:

1) la magnitud S_n tiene el límite S si $n \to \infty$, o sea,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S;$$

2) si $n \to \infty$ la magnitud S_n no tiene límite o éste es igual a ∞.

En el primer caso, la serie de denomina *convergente*, y el número $S = \lim_{n \to \infty} S_n$, su suma. En el segundo caso, se

llama *divergente* y no tiene suma. Por ejemplo, la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

formada por los términos de una progresión geométrica indefinida decreciente es una serie convergente, ya que, de acuerdo con la fórmula conocida para esta progresión

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

En cambio, la serie

$$2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^n+\ldots,$$

compuesta por los términos de una progresión geométrica infinita creciente, es divergente. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n-a}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n-2}{2-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2^{n+1}-2) = \infty.$$

§ 129. Condición necesaria de convergencia de una serie. Supongamos dada una serie convergente

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

Hallemos la suma de $n-1$ y n términos

$$S_{n-1} = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1},$$

$$S_n = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}+u_n.$$

Restando de la segunda igualdad la primera, obtendremos:

$$S_n - S_{n-1} = u_n. \qquad (2)$$

Calculemos el límite de ambos miembros de la igualdad (2) para $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} u_n,$$

ó

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} u_n. \qquad (3$$

De acuerdo con las condiciones, la serie (1) es convergente; entonces,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

La igualdad (3) se puede transcribir así:

$$S - S = \lim_{n\to\infty} u_n,$$

o

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (4)$$

Esta es la *condición necesaria* de convergencia de una serie, es decir, una serie no puede converger si no se verifica tal condición. Sin embargo, no es la *suficiente*. Demostremos lo dicho en un ejemplo.

Tomemos la llamada serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Aquí se verifica la condición (4), por cuanto

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

y, no obstante, esta serie diverge.

Para demostrarlo, remitámonos a la igualdad (§ 50)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

de donde (por cuanto la magnitud $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ crece al crecer n)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e. \qquad (5)$$

Hallando el logaritmo natural de ambos miembros de la inecuación (5), anotaremos:

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \ln e = 1,$$

de aquí

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}. \tag{6}$$

Pero

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n,$$

por lo que la inecuación (6) tomará la forma:

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}. \tag{7}$$

Suponiendo, en la inecuación (7), $n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, obtendremos:

$$\ln 2-\ln 1<1,$$

$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},$$

$$\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},$$

$$\ln 5-\ln 4<\frac{1}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

Sumando estas inecuaciones, hallaremos

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Si $n\to\infty$, entonces

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)\to\infty.$$

Por consiguiente, la serie armónica diverge.

§ 130. Condiciones suficientes de convergencia de una serie. 1. Comparación de series. Comparemos dos series de términos positivos

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

y

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (2)$$

1) Si la serie (2) converge y todos los términos de la serie (1) son menores que los correspondientes de la serie (2), la serie (1) también converge.

2) Si la serie (2) diverge y todos los términos de la serie (1) son mayores que los correspondientes de la serie (2), la serie (1) también diverge.

Aceptemos estos criterios sin demostrarlos.

EJEMPLO 1. Para establecer la convergencia de la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots \text{*)} \qquad (3)$$

se compara con la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots, \qquad (4)$$

compuesta por los miembros de una progresión geométrica indefinida decreciente. Todos los términos de la serie (3), a partir del segundo, son menores que los correspondientes de la serie (4); además, como sabemos, la serie (4) es convergente. Por consiguiente, la serie (3) también es convergente.

EJEMPLO 2. Tomemos la serie

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \qquad (5)$$

y comparémosla con la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (6)$$

Como todos los miembros de la serie (5), a partir del segundo, son mayores que los correspondientes de la serie (6) y ésta es divergente, la serie (5) también es divergente.

2. **Criterio de D'Alembert.** *Si la serie de términos positivos*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

*) El producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ se anota con el símbolo $m!$ y se lee "m factorial" (según la definición $0! = 1$).

es tal que se verifica la condición

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

la serie es convergente cuando $l<1$, *y divergente cuando* $l>1$.

Aceptemos este criterio sin demostrarlo.

EJEMPLO 3. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

SOLUCIÓN.

$$u_n=\frac{2n-1}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}:\frac{2n-1}{2^n}=\frac{2n+1}{2(2n-1)}.$$

Aplicando el criterio de D'Alembert, hallamos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}<1.$$

La serie dada converge.

EJEMPLO 4. Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ldots+\frac{n!}{10^n}+\ldots$$

SOLUCIÓN.

$$u_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{10^n};\quad u_{n+1}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)}{10^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)}{10^{n+1}}:\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{10^n}=\frac{n+1}{10};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$$

La serie dada diverge ya que el límite hallado es mayor que la unidad.

Al determinar si la serie es convergente, puede resultar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

En este caso, el criterio de D'Alembert no da respuesta y, por lo tanto, se requiere emplear otros procedimientos de análisis.

Ejercicios

Investigar si convergen las series

1. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\dfrac{1}{n2^n}+\ldots$

2. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^2}+\dfrac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)2^n}+\ldots$

3. $\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{2}{3\cdot 2^3}+\dfrac{3}{4\cdot 2^4}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)2^{n+1}}+\ldots$

4. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots+\sqrt[n]{0{,}001}+\ldots$

5. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\ldots+\dfrac{n}{n+1}+\ldots$

6. $\dfrac{10}{1}+\dfrac{10^2}{1\cdot 2}+\dfrac{10^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{10^n}{n!}+\ldots$

7. $\dfrac{3}{1}+\dfrac{3^2}{1\cdot 2}+\dfrac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{3^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{3^n}{n!}+\ldots$

8. $1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$

9. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 2}{2^2}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{2^3}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2^4}+\ldots+\dfrac{n!}{2^n}+\ldots$

10. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{16}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}+\ldots$

11. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots$

12. $\dfrac{2}{1000}+\dfrac{2^2}{2000}+\dfrac{2^3}{3000}+\ldots+\dfrac{2^n}{1000\,n}+\ldots$

§ 131. Criterio de convergencia de las series alternantes. Recibe el nombre de *serie alternante* la serie de la forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots, \quad (1)$$

donde $u_1, u_2, u_3 \ldots$ son números positivos. Demostremos el siguiente teorema:

Si todo término de una serie alternante es valor absoluto menor que el precedente y si

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0,$$

la serie converge.

DEMOSTRACIÓN. Designando con la letra m un número par de términos de la serie (1), escribamos la suma de m de sus términos:

$$S_m = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots + u_{m-1} - u_m.$$

Esta suma se puede representar en la forma siguiente:

$$S_m = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots + (u_{m-1} - u_m), \quad (2)$$

ó

$$S_m = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{m-2} - u_{m-1}) - u_m. \quad (3)$$

De acuerdo con la condición, las diferencias entre paréntesis de la igualdad (2) son positivas; por consiguiente, la suma S_m crece cuando m crece. Las diferencias entre paréntesis de la igualdad (3) también son positivas; por lo tanto

$$S_m < u_1.$$

Cuando $m \to \infty$, S_m crece de forma que se verifica $S_m < u_1$; esto significa que S_m tiene límite, es decir,

$$\lim_{m \to \infty} S_m = S. \quad (4)$$

Hemos demostrado que la suma S_m de un número par de términos tiene límite cuando $m \to \infty$.

Demostremos que la suma S_{m+1} de un número impar de términos también tiene límite cuando $m \to \infty$ y, además, el

mismo. De aquí se deducirá que la suma S_n de un número n cualquiera de términos de la serie (1) tiene límite si $n \to \infty$.

Tomemos la suma de un número impar $m+1$ de términos de la serie (1); entonces,

$$S_{m+1} = S_m + u_{m+1}.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$, obtendremos:

$$\lim_{m \to \infty} S_{m+1} = \lim_{m \to \infty} S_m + \lim_{m \to \infty} u_{m+1}.$$

Tomadas en consideración la igualdad (4) y las condiciones del teorema, anotaremos:

$$\lim_{m \to \infty} S_{m+1} = S + 0 = S.$$

De este modo, el límite de la suma de los términos de la serie (1) cuando $n \to \infty$ es el mismo para todo n, tanto par como impar, es decir, existe

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Por consiguiente, la serie (1) converge.

El teorema demostrado sirve como *criterio suficiente de convergencia de las series alternantes*.

EJEMPLO. Investigar la convergencia de la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

SOLUCIÓN. Como

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n}$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

entonces, conforme al teorema demostrado esta serie converge.

Ejercicios

Investigar la convergencia de las series:

1. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\ldots$
2. $1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}+\ldots$
3. $\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}+\ldots$

§ 132. **Series absolutamente convergentes.** Sea dada la serie

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (1)$$

cuyos términos son tanto números positivos como negativos. Escribamos una nueva serie, formada por los valores absolutos de los términos de la serie (1):

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+\ldots+|u_n|+\ldots \qquad (2)$$

Se puede demostrar que *si la serie* (2) *converge, también converge la serie* (1).

DEFINICIÓN. *Una serie se llama absolutamente convergente si converge la serie compuesta por los valores absolutos de todos sus términos.*

EJEMPLO. La serie.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots \qquad (3)$$

es absolutamente convergente, ya que converge la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots,$$

formada por los valores absolutos de la serie (3).

Sin embargo, no toda serie convergente es absolutamente convergente. Por ejemplo, la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots \qquad (4)$$

converge (véase el ejemplo del § 131); pero la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

compuesta de los valores absolutos de sus términos es una serie armónica y, por lo tanto, diverge (§ 129).

La serie (4) se denomina *no absolutamente* o *condicionalmente convergente.*

DEFINICIÓN. *Una serie convergente recibe el nombre de no absolutamente o condicionalmente convergente si diverge la serie formada de los valores absolutos de todos sus términos.*

Ejercicios

Determinar si convergen absolutamente o no absolutamente las series:

1. $\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{4}{16} + \ldots + \frac{n(-1)^{n+1}}{2^n} + \ldots$

2. $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \ldots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \ldots$

§ 133. **Series funcionales.** Sea dada la serie

$$f_1x + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \qquad (1)$$

cuyos términos no son números sino funciones del argumento x. Tal serie se denomina *funcional.* Un ejemplo de serie funcional puede ser la serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad (2)$$

formada por los términos de una progresión geométrica. Si se da al argumento x un valor numérico cualquiera, la serie funcional se convierte en numérica.

Puede ocurrir que la serie funcional sea convergente en unos valores de x y divergente en otros. El conjunto de todos los valores de x en que la serie (1) converge recibe el nombre de *campo de convergencia de la serie.*

En los límites de convergencia de la serie, la suma de sus términos será función de x.

Designado con $f(x)$ esta suma, podemos anotar:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

Esta igualdad se verifica sólo para los valores de x en el campo de convergencia de la serie; en este caso, representa la descomposición de la función $f(x)$ en una serie de funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... Analicemos un ejemplo.

Cuando $|x| < 1$ los términos de la serie (2) constituyen una progresión geométrica infinitamente decreciente y, por lo tanto, la serie (2) converge; para $|x| > 1$, los términos de esta serie constituyen una progresión geométrica infinitamente creciente y, por lo tanto, la serie diverge. Esta serie diverge también cuando $|x| = 1$. Así, pues, el campo de *convergencia de la serie* (2) es $|x| < 1$ *ó, de otro modo,* $-1 < x < 1$. Hallando la suma de la serie (2) como suma de los términos de una progresión geométrica infinitamente decreciente, obtendremos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x}.$$

Ahora podemos escribir la igualdad

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots,$$

que se verifica sólo para los valores del argumento $|x| < 1$. Esta igualdad representa la descomposición de la función $\frac{1}{1-x}$ en una serie por potencias de x.

§ 134. **Series potenciales.** *La serie funcional de la forma*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \qquad (1)$$

donde a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ... *son coeficientes constantes, se llama serie potencial.*

Si en la serie (1) se da al argumento x un valor cualquiera, obtendremos una serie numérica que será convergente o divergente en dependencia del valor de x. En los cursos completos de análisis matemático se demuestra que para cualquier serie potencial existe un campo continuo de valores de x en los que esta serie converge. Dicho campo se llama generalmente *intervalo de convergencia de la serie potencial* *. Aplicando los

*) A veces, el intervalo de convergencia consta de un punto ($x = 0$); en este caso, la serie converge sólo cuando $x = 0$.

criterios ya conocidos, se puede hallar este intervalo de convergencia.

EJEMPLO. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (2)$$

SOLUCIÓN. Apliquemos el criterio de D'Alembert a la serie

$$\frac{|x|}{1}+\frac{|x^2|}{2}+\frac{|x^3|}{3}+\frac{|x^4|}{4}+\ldots+\frac{|x^n|}{n}+\ldots \qquad (3)$$

Para esta serie tenemos:

$$u_n=\frac{|x^n|}{n},\quad u_{n+1}=\frac{|x^{n+1}|}{n+1},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{|x^{n+1}|}{n+1}:\frac{|x^n|}{n}=\frac{n|x|}{n+1}.$$

De aquí hallamos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx}{n+1}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=|x|.$$

Para la convergencia de la serie (3) es suficiente que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1,\ \text{o sea,}\ |x|<1,$$

o de otra forma

$$-1<x<1.$$

De aquí se deduce que la serie (2) es absolutamente convergente con todos los valores de x que satisfacen las últimas inecuaciones, es decir, con todos los valores de x comprendidos entre -1 y $+1$, excepto los valores extremos

$$x=-1\ \text{y}\ x=+1.$$

La cuestión relativa a la convergencia de la serie (2) para $x=-1$ y $x=+1$ hay que investigarla especialmente.

Supongamos en nuestra serie $x=-1$ y $x=+1$:

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$$

y

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

La primera serie es alternante, satisface el teorema del § 131 y, por lo tanto, converge; mientras que la segunda es armónica y, por ello, diverge. Así, pues, la serie analizada es convergente para $-1 \leqslant x < +1$; además, $-1 < x < 1$ es absolutamente convergente.

Diferenciando la serie (1), obtendremos también una serie potencial:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

En los cursos completos de análisis matematico se demuestra el siguiente teorema: *una serie potencial se puede diferenciar e integrar término a término tantas veces como se quiera, quedando el intervalo de convergencia de las series obtenidas igual al intervalo inicial* *).

Ejercicios

Investigar la convergencia de las series:

1. $\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n}+\ldots$

2. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

3. $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

4. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots$

5. $x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+nx^n+\ldots$

§ 135. Serie de Maclaurin. Examinemos la función $f(x)$ que se descompone en una serie potencial:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \quad (1)$$

*) Más exactamente, en los intervalos de convergencia de estas series coinciden los conjuntos de puntos internos; la cuestión relativa a la convergencia de los puntos extremos ha de ser resuelta especialmente.

Conforme al teorema del § 134, la serie (1) puede diferenciarse término a término tantas veces como se quiera, quedando el intervalo de convergencia de las series obtenidas igual al intervalo de la serie (1). Diferenciemos esta serie n veces:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \ldots + \\ &\quad + (n-1)\, na_nx^{n-2} + \ldots, \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \ldots + \\ &\quad + (n-2)\,(n-1)\, na_nx^{n-3} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Suponiendo en las igualdades (1) y (2) $x = 0$, hallaremos:

$$f(0) = a_0, \quad \text{de donde} \quad a_0 = f(0),$$

$$f'(0) = a_1, \quad \text{de donde} \quad a_1 = f'(0),$$

$$f''(0) = 2a_2, \quad \text{de donde} \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2},$$

$$f'''(0) = 2 \cdot 3a_3, \quad \text{de donde} \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

y así sucesivamente.

Sustituyendo los valores hallados de los coeficientes en la igualdad (1), obtendremos:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots \quad (3)$$

La igualdad (3) representa la serie de Maclaurin que permite descomponer la función $y = f(x)$ en una serie por potencias de x.

§ 136. Ejemplos de descomposición de funciones en una serie.

EJEMPLO 1. Descomponer en serie potencial de Maclaurin $f(x) = e^x$.

SOLUCIÓN. Hallamos:

$$f'(x) = e^x,$$

$$f''(x) = e^x,$$

$$f'''(x) = e^x$$

y así sucesivamente.

Suponiendo $x = 0$, obtendremos:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1,$$
$$f''(0) = 1, \quad f'''(0) = 1$$

etcétera.

De este modo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

La serie (1) converge para todo valor de x (véase el ejercicio 3 del § 134).

EJEMPLO 2. Descomponer en serie potencial de Maclaurin $f(x) = \text{sen } x$.

SOLUCIÓN. Hallamos:

$$f(x) = \text{sen } x \quad \text{y} \quad f(0) = 0,$$
$$f'(x) = \cos x \quad \text{y} \quad f'(0) = 1,$$
$$f''(x) = -\text{sen } x \quad \text{y} \quad f''(0) = 0,$$
$$f'''(x) = -\cos x \quad \text{y} \quad f'''(0) = -1$$
$$f^{(\text{IV})}(x) = \text{sen } x \quad \text{y} \quad f^{(\text{IV})}(0) = 0,$$
$$f^{(\text{V})}(x) = \cos x \quad \text{y} \quad f^{(\text{V})}(0) = 1,$$
$$f^{(\text{VI})}(x) = -\text{sen } x \quad \text{y} \quad f^{(\text{VI})}(0) = 0,$$
$$f^{(\text{VII})}(x) = -\cos x \quad \text{y} \quad f^{(\text{VII})}(0) = -1$$

y así sucesivamente.

De esta manera,

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (2)$$

Formando la serie de valores absolutos de los términos de la serie (2), investiguemos su convergencia. Apliquemos el criterio de D'Alembert,

$$u_n = \frac{|x^{2n-1}|}{(2n-1)!}; \quad u_{n+1} = \frac{|x^{2n-1}|}{(2n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!} : \frac{|x^{2n-1}|}{(2n-1)!} = \frac{x^2}{2n(2n+1)};$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2}{2n(2n+1)} = x^2 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0.$$

La última igualdad se verifica para cualquier x; por consiguiente, la serie (2) es absolutamente convergente para todo valor de x.

EJEMPLO 3. Descomponer en serie potencial de Maclaurin $f(x) = \cos x$.

SOLUCIÓN. Esta función se descompone en una serie del mismo modo que sen x. Sin embargo, la serie para cos x se puede obtener más sencillamente. Como la serie potencial (2) converge para todos los valores de x, diferenciándola obtendremos una serie potencial convergente en esos mismos valores (teorema del § 134). Derivando ambos miembros de la igualdad (2), hallaremos:

$$\cos x = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots,$$

o

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (3)$$

EJEMPLO 4. Descomponer en serie potencial de Maclaurin $f(x) = (1+x)^m$.

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$f(x) = (1+x)^m \quad \text{y} \quad f(0) = 1;$$
$$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \quad \text{y} \quad f'(0) = m;$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \quad \text{y} \quad f''(0) = m(m-1);$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$$

y

$$f'''(0) = m(m-1)(m-2)$$

y así sucesivamente.

De este modo,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots \qquad (4)$$

Si m es un número natural, la serie (4) se interrumpe en el término $(m+1)$, por cuanto los coeficientes siguientes se convierten en cero; si m es fraccionario o negativo, la serie es infinita. Aplicando el criterio de D'Alembert, se puede mostrar que la serie infinita (4) converge para $|x|<1$.

EJEMPLO 5. Descomponer $f(x)=\operatorname{arc\,sen} x$ en una serie potencial.

SOLUCIÓN. Apliquemos la fórmula (4) a la función $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}(-x^2)^2+$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(-x^2)^3+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\ldots \qquad (5)$$

Integrando esta igualdad en los límites desde 0 hasta x, obtendremos:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x dx+\frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx+\frac{3}{8}\int_0^x x^4dx+$$

$$+\frac{5}{16}\int_0^x x^6dx+\ldots;$$

de aquí

$$\operatorname{arc\,sen} x\Big|_0^x=x\Big|_0^x+\frac{1}{6}x^3\Big|_0^x+\frac{3}{40}x^5\Big|_0^x+\frac{5}{112}x^7\Big|_0^x+\ldots,$$

o

$$\operatorname{arc\,sen} x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\ldots \qquad (6)$$

Como la serie (5) converge para $|x| < 1$, la serie (6) converge también para $|x| < 1$ (teorema del § 134).

EJEMPLO 6. Descomponer en una serie potencial $f(x) = \text{arc tg } x$.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la fórmula (4), se tiene:

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 + (-1)\,x^2 + \frac{-1(-1-1)}{1\cdot 2}x^4 +$$

$$+ \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^6 + \ldots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \quad (7)$$

Integrando la igualdad (7) en los límites desde 0 hasta x, obtendremos:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \int_0^x x^6 dx + \ldots,$$

de aquí

$$\text{arc tg } x \Big|_0^x = x\Big|_0^x - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^x + \frac{1}{5}x^5\Big|_0^x - \frac{1}{7}x^7\Big|_0^x + \ldots,$$

o

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (8)$$

La serie (8) converge para $|x| < 1$, por cuanto la serie (7) converge para $|x| < 1$ (teorema del § 134).

§ 137. Aplicación de las series potenciales a los cálculos aproximados. Las series potenciales se emplean mucho en los cálculos aproximados. Mostremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Calcular sen 18°.

SOLUCIÓN. Un ángulo de 18° es igual a 0,3142 radianes. Sustituyendo el valor de $x = 0{,}3142$ en la fórmula (2) (§ 136), obtendremos:

$$\text{sen } 18° = \text{sen } 0{,}3142 \approx 0{,}3142 - \frac{0{,}3142^3}{1\cdot 2\cdot 3} \approx$$

$$\approx 0{,}3142 - 0{,}0052 = 0{,}3090.$$

EJEMPLO 2. Calcular π.

SOLUCIÓN. Suponiendo en la igualdad (6) (§ 136) $x = \frac{1}{2}$ y tomando en consideración que arc sen $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, obtendremos

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 \cdot 6} + \frac{3}{2^5 \cdot 40}, \text{ de aquí}$$

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{32 \cdot 20} \approx 3 + 0{,}125 + 0{,}0141 \approx 3{,}14.$$

EJEMPLO 3. Calcular $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

SOLUCIÓN. La integral indefinida de esta forma no se puede expresar en funciones elementales. Sin embargo, mediante las series puede calcularse aproximadamente en los límites indicados. Dividamos por x ambos miembros de la igualdad (2) (§ 136):

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!};$$

de aquí, obtendremos:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \approx \int_0^1 dx - \frac{1}{3!}\int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{5!}\int_0^1 x^4 dx =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{1}{3!3}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{5!5}x^5\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}0556 + 0{,}0017 = 0{,}9461.$$

§ 138. Series con términos complejos. Tomemos la serie

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \ldots + (a_n + b_n i) + \ldots, \qquad (1)$$

cuyos términos son números complejos de la forma $a_n + b_n i$, donde a y b son números reales e i, la unidad imaginaria. La serie (1) se llama *convergente* si convergen las series

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (2)$$

y

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots, \qquad (3)$$

compuestas de las partes reales y de los coeficientes de las partes imaginarias de los términos de la serie (1). Sean las sumas de las series (2) y (3) iguales a A y B, respectivamente; entonces, la suma de la serie (1) será igual a $A + Bi$. Por ejemplo, la suma de los términos de la serie

$$\left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{2^n}i\right) + \ldots$$

es igual a

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right)i =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}i = \frac{3}{2} + i = 1{,}5 + i.$$

Demostremos el siguiente teorema.

Una serie con términos complejos converge si converge la serie compuesta de los módulos de sus términos.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \ldots, \qquad (4)$$

compuesta de los módulos de los términos de la serie (1), converge. Como se ve,

$$|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{y} \quad |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Por lo tanto, los términos de las series (2) y (3) no superan los términos correspondientes de la serie (4). En consecuencia, las series (2) y (3) convergen y, además, absolutamente (§ 132) y, por ello, converge la serie (1). El teorema queda demostrado.

En algunos casos, se examinan series potenciales de la forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

donde a_0, a_1, a_2, a_3 ... son números reales o complejos, y z, una variable compleja de la forma $x + iy$. Utilizando el teorema demostrado y los criterios de convergencia que ya conocemos, se puede investigar la convergencia de tales series.

§ 139. Fórmulas de Euler. En el § 136 hemos representado la función exponencial e^z en forma de la serie (1) para los valores reales del exponente. En los cursos completos de matemáticas superiores se indica que esta serie conserva esa misma forma cuando el exponente es complejo. De este modo, se puede escribir:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \quad (1)^*)$$

donde z es una variable compleja de la forma $x + iy$.

En el caso particular en que se suponga $z = iy$ en la igualdad (1), obtendremos:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots,$$

o

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \frac{i^5y^5}{5!} + \ldots + \frac{i^ny^n}{n!} + \ldots$$

Pero

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \text{etc.};$$

por lo tanto,

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots$$

Separando los términos reales e imaginarios, anotaremos:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) + \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right) i.$$

Tomadas en cuenta las fórmulas (3) y (2) del §136, obtendremos:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \quad (2)$$

*) Puede demostrarse que esta serie es absolutamente convergente para todos los valores de z.

Sustituyendo en la igualdad (2) y por $-y$, tendremos:

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y),$$

o

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \tag{3}$$

Las igualdades (2) y (3) expresan la relación entre las funciones exponencial y trigonométricas. Estas igualdades fueron presentadas por Euler.

Despejando cos y y sen y en las igualdades (2) y (3), obtendremos:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \tag{4}$$

Observemos que de la igualdad (2) se deduce fácilmente una nueva forma de anotación de un número complejo, con un módulo r y un argumento y, a saber:

$$r(\cos y + i \operatorname{sen} y) = re^{iy}.$$

Así, pues, un número complejo se puede anotar de tres formas: *algebraica, trigonométrica* y *exponencial*. Por ejemplo,

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Las fórmulas de Euler permiten determinar la periodicidad de una función exponencial. En efecto, sustituyendo en la igualdad (2) y por $y + 2\pi$, hallaremos:

$$e^{i(y+2\pi)} = \cos(y + 2\pi) + i \operatorname{sen}(y + 2\pi) =$$

$$= \cos y + i \operatorname{sen} y = e^{iy}.$$

Así, pues,

$$e^{(y+2\pi)i} = e^{iy},$$

o

$$e^{iy + 2\pi i} = e^{iy}. \tag{5}$$

La igualdad (5) indica que e^{iy} es una función periódica con un período imaginario $2\pi i$.

Capítulo XV
Análisis armónico

§ 140. Gráficos de las funciones de forma $y = A \operatorname{sen} \omega x$. En los párrafos expuestos a continuación tendremos que emplear funciones de forma $y = A \operatorname{sen} \omega x$ y sus gráficos.

Mostraremos varios ejemplos de cómo construir los gráficos de tales funciones.

EJEMPLO 1. Construir el gráfico de la función $y = \operatorname{sen} 3x$.

SOLUCIÓN. La función dada es periódica y su dominio son todos los números reales. Construyamos el gráfico de esta función para los valores del argumento desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$, confeccionando previamente la siguiente tabla de valores de x e y.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	1	0	—1	0	1	0	—1	0	1	0	—1	0

Considerando cada par de valores de x e y como coordenadas de los puntos del gráfico de nuestra función, hallaremos estos puntos y, trazando por ellos una línea suave, obtendremos el gráfico de la función $y = \operatorname{sen} 3x$, representado en la fig. 143 en forma de línea continua, o sea, una sinusoide cuyo período mínimo es $\frac{2\pi}{3}$.

Como evidencia la figura 143, este gráfico puede obtenerse a partir del gráfico de la función $y = \operatorname{sen} x$, representado en

esa misma figura con línea de trazos, disminuyendo a la tercera parte la escala para el eje Ox.

EJEMPLO 2. Construir el gráfico de la función $y = 3 \operatorname{sen} 2x$.
SOLUCIÓN. Confeccionemos la tabla de valores de x e y.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	3	0	—3	0	3	0	—3	0

El gráfico construido por los puntos con las coordenadas calculadas representa una sinusoide cuyo período mínimo es $\frac{2\pi}{2} = \pi$ (en la fig. 144 está representada con línea continua).

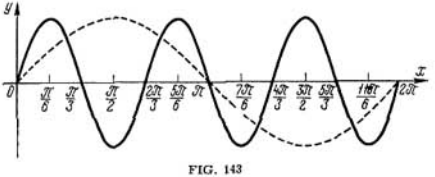


FIG. 143

El gráfico de la función $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ se puede obtener a partir del de la función $y = \operatorname{sen} x$, representado en esa misma figura con línea de trazos, disminuyendo a la mitad la escala del eje Ox y triplicando la del eje Oy.

§ 141. Oscilaciones armónicas.

I. Oscilaciones armónicas simples. En las ciencias naturales y la técnica se observan con frecuencia procesos periódicos, es decir, procesos que se repiten cada cierto intervalo determinado de tiempo. Por ejemplo, las oscilaciones de un péndulo, los fenómenos de la corriente alterna y otros.

El fenómeno periódico más simple es la oscilación armónica dada por la ley

$$y = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

En la igualdad (1), el factor constante A es la magnitud máxima que puede tener y y se llama *amplitud de oscilación;* $(\omega t + \varphi_0)$, *fase de oscilación;* ω, *frecuencia de oscilación,* y φ_0, *fase inicial.*

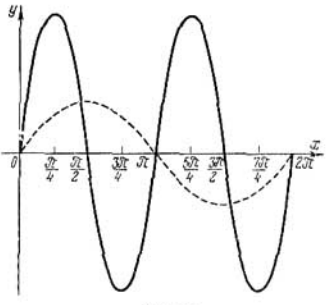


FIG. 144

La función (1) es periódica con un período mínimo de $\frac{2\pi}{\omega}$. En efecto, la función no varía su valor si se agrega al argumento t la magnitud $\frac{2\pi}{\omega}$:

$$y = A \operatorname{sen}\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi_0\right] = A \operatorname{sen}\,(\omega t + 2\pi + \varphi_0) =$$

$$= A \operatorname{sen}\,(\omega t + \varphi_0).$$

Este período es el mínimo, por cuanto 2π es el período mínimo para la función sen x.

La magnitud $\frac{2\pi}{\omega}$ es el tiempo invertido en un movimiento oscilatorio, por lo que recibe el nombre de *período de oscilación*. Designándolo con la letra T, anotaremos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

de donde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Como T es el tiempo de una oscilación, $\frac{2\pi}{T}$ será el número de oscilaciones durante el tiempo 2π. Así, pues, la magnitud ω define la frecuencia de oscilaciones. Transformemos la igualdad (1), aplicando la fórmula del seno de la suma de dos ángulos:

$$A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0) = A(\operatorname{sen} \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi_0) =$$

$$= A \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \omega t + A \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \omega t.$$

Designando

$$a = A \cos \varphi_0 \text{ y } b = A \operatorname{sen} \varphi_0,$$

obtendremos:

$$y = a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t. \qquad (2)$$

El movimiento oscilatorio regido por la ley de la función (1) o, lo que es lo mismo, de la función (2) se llama *oscilación armónica simple*, y su gráfico, *armónico simple*.

EJEMPLO. Un punto material de masa m es atraído a un centro fijo O con una fuerza proporcional a la distancia S del punto al centro de atracción O. Hallar la ley del movimiento de este punto.

SOLUCIÓN. El punto se mueve por una recta que une su posición inicial y el centro O. Comencemos el cálculo de S a partir de este centro. De acuerdo con los datos del problema, la fuerza que actúa sobre el punto es

$$F = nS,$$

donde n es el coeficiente de proporcionalidad; además, sabemos que esta fuerza es igual al producto de la masa del punto por la aceleración de su movimiento. Teniendo en cuenta que, en este caso, el sentido de la fuerza es opuesto al de la lectura de la distancia S, se tiene

$$m \frac{d^2S}{dt^2} = - nS,$$

o

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{n}{m} S = 0.$$

Suponiendo

$$\frac{n}{m} = b^2,$$

obtendremos:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + b^2S = 0. \tag{3}$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes. La ecuación característica

$$k^2 + b^2 = 0$$

tiene las raíces

$$k_1 = bi \text{ y } k_2 = -bi.$$

Aplicando la fórmula (15) (§ 127) cuando $a = 0$, hallaremos la solución general de la ecuación (3):

$$S = C_1 \cos bt + C_2 \operatorname{sen} bt. \tag{4}$$

Supongamos

$$C_1 = A \operatorname{sen} \varphi \text{ y } C_2 = A \cos \varphi,$$

donde A y φ son otras constantes arbitrarias; entonces, la solución (4) tomará la forma:

$$S = A \operatorname{sen} \varphi \cos bt + A \cos \varphi \operatorname{sen} bt =$$

$$= A (\operatorname{sen} \varphi \cos bt + \cos \varphi \operatorname{sen} bt) = A \operatorname{sen} (bt + \varphi).$$

Esta ecuación evidencia que el punto efectúa oscilaciones armónicas alrededor del centro O.

II. **Oscilaciones armónicas complejas.** No todo proceso periódico se puede considerar oscilación armónica simple. Son muy frecuentes los casos en que el fenómeno periódico es resultado de la adición de varias oscilaciones armónicas simples. El movimiento resultante se denomina *oscilación armónica compleja*, y su gráfico, *armónico complejo*.

Así, pues, *el armónico complejo es el resultado de la adición de varios armónicos simples o, dicho de otro modo, el resultado de la superposición de armónicos simples.*

Analicemos un ejemplo. Supongamos se dan dos armónicos simples definidos por las ecuaciones:

$$y = \operatorname{sen} t$$

e

$$y = \operatorname{sen} 3t.$$

En la fig. 145, estos armónicos están representados con líneas de trazos, mientras que el armónico complejo, gráfico de la función

$$y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t,$$

lo está con una línea continua. Todo punto de un armónico complejo tiene la ordenada igual a la suma de las ordenadas

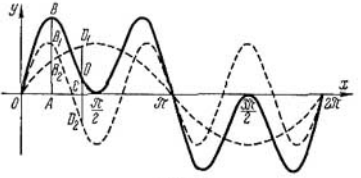


FIG. 145

de los puntos que se hallan en los armónicos simples y tienen la misma abscisa. Por ejemplo,

$$AB = AB_1 + B_1B = AB_1 + AB_2$$

$$CD = CD_1 - DD_1 = CD_1 - CD_2 = CD_1 + (-CD_2).$$

Como se ve en la figura 145, el armónico resultante se repetirá en cada intervalo $t = 2\pi$, es decir, será periódico, aunque su forma pierde el carácter de sinusoide.

Se puede demostrar que, en general, cuando se suman armónicos simples de diferentes frecuencias se obtiene un armónico complejo de tipo no sinusoidal, y si las frecuencias son iguales, un armónico del mismo tipo que los simples.

§ 142. Series trigonométricas. En el § 141 se indicó que existen procesos periódicos a los que no se puede considerar fenómenos oscilatorios simples. Supongamos que cierto movimiento periódico viene dado por una función periódica distinta de la (1) (§ 141). Para tener una idea del carácter de este

movimiento, esta función se descompone en una serie de armónicos simples, que tiene la siguiente forma:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega t + b_1 \operatorname{sen} \omega t) + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t) + \ldots + (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t) \ldots + \quad (1)$$

La serie (1) se llama *serie trigonométrica*, y los números $a_1, a_1, a_2 \ldots b_1, b_2, \ldots$, *coeficientes de la serie*.

Supongamos, para simplificar,

$$x = \omega t$$

y consideremos que, para todos los valores de x, la serie (1) converge a la función dada [es decir, la suma de la serie es igual a la función $f(x)$]; entonces se podrá anotar:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \ldots$$

o, más brevemente,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \quad (2)$$

Como se ve, $f(x)$ es una función periódica cuyo período es 2π, ya que al agregar a x (o restar de x) 2π un número entero de veces no varía la magnitud de los términos de la serie (2) y, por consiguiente, tampoco la magnitud de la suma (2).

De aquí se deduce que si se tiene una serie trigonométrica basta analizarla sólo para los valores de x desde 0 hasta 2π (o desde $-\pi$ hasta $+\pi$), por cuanto fuera de este intervalo de valores del argumento se repetirá periódicamente la magnitud de cada uno de los términos de la serie.

Cuanto mayor sea el número de armónicos simples de la serie (2) que se suma, con tanta mayor exactitud el armónico resultante representará el movimiento periódico definido por la función $f(x)$. Por este motivo, la cuestión relativa a la descomposición de una función en una serie trigonométrica adquiere gran importancia en las ciencias aplicadas.

El proceso de descomposición de una función, que representa un movimiento periódico complejo, en una serie trigonométrica recibe el nombre de análisis armónico.

§ 143. Coeficientes de Fourier. Serie de Fourier. Para descomponer la función periódica $f(x)$ con período 2π en una serie trigonométrica, es necesario hallar los coeficientes de esta serie. Exponemos sin deducción las fórmulas para calcular estos coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\operatorname{sen} nx\,dx, \tag{1}$$

donde $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Los números obtenidos por las fórmulas (1) se denominan *coeficientes de Fourier* *), y la serie trigonométrica con estos coeficientes, *serie de Fourier.*

DEFINICIÓN. *La serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a\cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\operatorname{sen} nx\,dx,$$

se llama serie de Fourier de la función $f(x)$.

*) Las fórmulas (1) fueron presentadas ya antes por Euler (1707—1783), pero las aplicó extensamente el matemático francés J. Fourier (1768—1830).

Si la serie de Fourier converge a la función $f(x)$, se puede anotar:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \qquad (2)$$

Es necesario hacer notar que la magnitud de las integrales de las fórmulas (1) no varía si se toman por límites 0 y 2π. En este caso, las fórmulas para hallar los coeficientes de Fourier se pueden escribir así:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx, \qquad (3)$$

donde $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

A veces, las fórmulas (3) resultan más cómodas que las (1).

§ 144. Posibilidad de descomponer una función no periódica en serie de Fourier. Como sabemos, la función periódica define un movimiento oscilatorio. Sin embargo, existen procesos oscilatorios verificados conforme a la ley de una función *no periódica*. Por ello, para estudiar un movimiento oscilatorio definido por una función no periódica, es conveniente descomponerla en serie de Fourier. Esto es factible si se verifican ciertas condiciones de las que trataremos en el § 145.

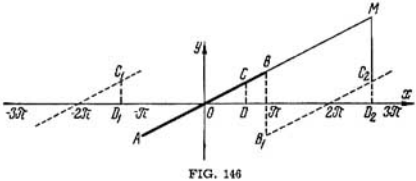


FIG. 146

Supongamos dada, por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x \text{ si } -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \qquad (1)$$

cuyo gráfico está representado en la fig. 146 por el segmento de recta AB.

Mostremos que para descomponer esta función en serie de Fourier puede aplicarse la regla del § 143.

Con este propósito, introduzcamos la función periódica auxiliar $\varphi(x)$ con período 2π, verificándose

$$\varphi(x) = f(x) \text{ en el intervalo de valores de } x \text{ desde } -\pi \text{ hasta } +\pi, \tag{2}$$

$\varphi(x) \neq f(x)$ fuera de este intervalo.

A la función $\varphi(x)$, como función periódica, se le puede aplicar la regla del § 143. Pero sabemos que, tratándose de una serie trigonométrica, basta analizarla para el intervalo de valores del argumento desde $-\pi$ hasta $+\pi$ (§ 142); por lo tanto, las fórmulas del § 143 se pueden aplicar no sólo a la función $\varphi(x)$, sino también, de acuerdo con la condición (2), a la dada.

La magnitud de la suma de la serie de Fourier obtenida para la función (1) se repetirá en cada intervalo igual a 2π, a consecuencia de la periodicidad de sus términos, y tomará los valores de la función dada (1). Expliquemos esto geométricamente. Para ello, translademos el segmento AB (fig. 146), conservando su sentido, a lo largo del eje Ox a distancias iguales a 2π, 4π, etc., a la derecha y a la izquierda del origen de coordenadas, o como suele decirse, prolonguemos periódicamente el gráfico de la función (1). Tomemos un valor de x dentro del intervalo desde $-\pi$ hasta $+\pi$; por ejemplo

$$x = OD = 2,$$

entonces, la ordenada

$$DC = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

será la magnitud de la suma de la serie de Fourier de la función (1) cuando $x = 2$. Es evidente que para

$$x = OD_2 = 2 + 2\pi$$

o

$$x = OD_1 = 2 - 2\pi$$

el valor de las odernadas D_2C_2 y D_1C_1 y, por consiguiente, la suma de la serie para estos mismos valores de x no variará y seguirá siendo igual a la unidad.

Observemos que para los valores de x fuera del intervalo de $-\pi$ a $+\pi$ la suma de la serie de Fourier de función (1) y los valores de esta función no son iguales entre sí. En efecto, la suma de esta serie cuando $x = 2 + 2\pi$, como hemos hallado, es igual a la unidad, y el valor de la función

$$f(2 + 2\pi) = D_2M = \frac{1}{2}(2 + 2\pi) = 1 + \pi.$$

Todo lo dicho confirma la idea de que tiene sentido analizar la serie de Fourier de una función sólo en el intervalo $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

§ 145. Condición de Dirichlet. Teorema de Dirichlet. Como ya se ha dicho, una función $f(x)$ con dominio $-\pi \leqslant x \leqslant +\pi$ se puede descomponer en una serie de Fourier que converge a la función dada $f(x)$ en determinadas condiciones. Estas condiciones, llamadas *condiciones de Dirichlet*, consisten en lo siguiente:

1) *la función debe ser continua en el intervalo de valores de x desde $-\pi$ hasta $+\pi$ o puede tener discontinuidades de primer género en dicho intervalo* (véase el § 57, pág. 162), *pero en número finito.*

2) *la función debe tener un número finito de máximos y mínimos o no tener ninguno.*

Uno de los teoremas fundamentales empleados en el análisis de las series de Fourier es el teorema de Dirichlet.

Teorema de Dirichlet. *Si una función $f(x)$ con dominio $-\pi \leqslant x \leqslant +\pi$ satisface las condiciones de Dirichlet, entonces*

1) *la serie de Fourier de la función $f(x)$ converge en el intervalo indicado de valores de x;*

2) *la suma de esta serie es igual a la función $f(x)$ en todos los puntos de su continuidad;*

3) *en los puntos de discontinuidad de la función la suma de la serie es igual a magnitud de la ordenada del punto medio del salto del gráfico de la función,* y

4) *para $x = \pi$ y $x = -\pi$ la suma de la serie es la misma e igual a*

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

Aceptemos este teorema sin demostrarlo.

A continuación, utilizaremos sólo funciones que satisfagan las condiciones de Dirichlet y, por lo tanto, no nos detendremos en ellas al analizar los ejemplos.

Antes de pasar a la descomposición de funciones en series de Fourier, debemos conocer el método de integración por partes, sin el cual es imposible determinar los coeficientes de Fourier.

§ 146. Integración por partes. Sean u y v funciones diferenciables de x; entonces, conforme a la regla IV (§ 70), se tiene

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

o

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

de donde

$$u\,dv = d(uv) - v\,du. \tag{1}$$

Integrando ambos miembros de la igualdad (1), obtendremos:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du,$$

o

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2}$$

La igualdad (2) sirve de *fórmula de integración por partes.*

EJEMPLO 1. Hallar $\int x\cos x\,dx$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$\left.\begin{aligned} u &= x, \\ dv &= \cos x\,dx, \end{aligned}\right\}$$

entonces,

$$\left.\begin{aligned} du &= dx, \\ v &= \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(la constante de integración la anotaremos en el resultado definitivo).

Sustituyendo (3) en (2), obtendremos:

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x -$$

$$-\int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\int x \cos nx\, dx$.

SOLUCIÓN. Supongamos

$$u = x,$$

$$dv = \cos nx\, dx,$$

entonces

$$du = dx,$$

$$v = \int \cos nx\, dx.$$

Por la fórmula 4) (§ 108), se tendrá:

$$v = \int \cos nx\, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx.$$

De acuerdo con la fórmula (2), se tiene:

$$\int x \cos nx\, dx = \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{1}{n}\int \operatorname{sen} nx\, dx\ ^{*)} =$$

$$= \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{-\cos nx}{n} + C = \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C. \quad (4)$$

De modo análogo se puede hallar:

$$\int x \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} + C. \quad (5)$$

EJEMPLO 3. Hallar $\int x^2 \cos nx\, dx$.

*) Se aplica la fórmula 3) (§ 108).

SOLUCIÓN. Supongamos

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2, \\ dv &= \cos nx\, dx, \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} du &= 2x\, dx, \\ v &= \int \cos nx\, dx = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \\ &\qquad \text{(véase el ejemplo 2).} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Sustituyamos (6) en (2):

$$\int x^2 \cos nx\, dx = \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen} nx}{n} - \int \frac{2x \operatorname{sen} nx}{n}\, dx =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{2}{n}\int x \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Tomando en consideración la igualdad (5), obtendremos:

$$\int x^2 \cos nx\, dx = \frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} - \frac{2}{n}\left(-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} + C_1\right) =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \operatorname{sen} nx}{n^3} + C. \quad (7)$$

Del mismo modo hallaremos:

$$\int x^2 \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2x \operatorname{sen} nx}{n^2} + \frac{2 \cos nx}{n^3} + C. \quad (8)$$

§ 147. Ejemplos de descomposición de funciones en una serie de Fourier.

EJEMPLO 1. Descomponer en una serie de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Por las fórmula (1) (§ 143) hallaremos los coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0 \cdot dx.$$

Pero

$$\int 0 \cdot dx = C, \text{ por cuanto } dC = 0 \cdot dx;$$

además,

$$\int_0^{\pi} 0 \cdot dx = C - C = 0.$$

Por lo tanto,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \cdot 0 = \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{\pi^2}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x \cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 0 \cdot dx.$$

Tomando en consideración la igualdad (4) (§ 146), obtendremos:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \cdot 0 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{0 \cdot \operatorname{sen} 0}{n} + \frac{\cos 0}{n^2} - \left[\frac{-\pi \operatorname{sen}(-n\pi)}{n} + \frac{\cos(-n\pi)}{n^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2} - \frac{\pi \operatorname{sen} n\pi}{n} - \frac{\cos n\pi}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{\pi \cdot 0}{n} - \frac{\cos n\pi}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi).$$

De aquí

$$a_1 = \frac{1}{\pi \cdot 1^2}(1 - \cos \pi) = \frac{1}{\pi}(1 + 1) = \frac{2}{\pi},$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi \cdot 2^2}(1 - \cos 2\pi) = \frac{1}{2^2\pi}(1 - 1) = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi \cdot 3^2}(1 - \cos 3\pi) = \frac{1}{3^2\pi}(1 - \cos \pi) = \frac{1}{3^2\pi}(1 + 1) = \frac{2}{3^2\pi},$$

$$a_4 = \frac{1}{\pi \cdot 4^2}(1 - \cos 4\pi) = \frac{1}{4^2\pi}(1 - \cos 0) = \frac{1}{4^2\pi}(1 - 1) = 0,$$

etc.

Como se ve, cuando el valor de n es par, los coeficientes a_n son nulos.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\operatorname{sen} nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\cdot dx.$$

De acuerdo con la igualdad (5) (§ 146), obtendremos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\cdot 0 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-0\cdot\cos 0}{n} + \frac{\operatorname{sen} 0}{n^2} - \left[\frac{\pi\cos(-n\pi)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(-n\pi)}{n^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + 0 - \frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\operatorname{sen} n\pi}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{0}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right) = -\frac{\cos n\pi}{n}.$$

De aquí

$$b_1 = -\frac{\cos\pi}{1} = 1,$$

$$b_2 = -\frac{\cos 2\pi}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$b_3 = -\frac{\cos 3\pi}{3} = -\frac{\cos\pi}{3} = \frac{1}{3},$$

$$b_4 = -\frac{\cos 4\pi}{4} = -\frac{\cos 0}{4} = -\frac{1}{4}$$ y así sucesivamente.

La serie buscada se anotará así:

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots$$

De acuerdo con el teorema de Dirichlet, esta serie converge a la función dada en todos los puntos del intervalo de valores de x desde $-\pi$ hasta $+\pi$, excepto $x = -\pi$ y $x = \pi$. En

efecto, cuando $x = -\pi$ y $x = \pi$ la suma de la serie es igual a $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{-\pi+0}{2} = -\frac{\pi}{2}$; mientras que cuando $x = -\pi$ y $x = \pi$ los valores de la función son de $-\pi$ y 0, es decir, no coinciden con la suma de la serie.

De este modo, podrá anotarse:

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$

$$+\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots\right) \text{ cuando } -\pi < x < \pi.$$

EJEMPLO 2. Descomponer en una serie de Fourier la función

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

SOLUCIÓN. En este caso, para hallar los coeficientes de Fourier utilizaremos las fórmulas (3) (§143):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\pi - \frac{4\pi^2}{4}\right) = \frac{1}{\pi}(\pi^2 - \pi^2) = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\cos nx\, dx\right)^{*)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\cos nx\, dx\right).$$

*) $\int \cos nx\, dx$ se halla por la fórmula 4) (§ 108).

Tomada en consideración la igualdad (4) (§ 146), obtendremos:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen} nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{x\operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen} 2\pi n - \operatorname{sen} 0) - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\operatorname{sen} 2\pi n}{n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos 2\pi n}{n^2} - \frac{0\cdot\operatorname{sen} 0}{n} - \frac{\cos 0}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen} 2\pi n - \frac{\pi\operatorname{sen} 2\pi n}{n} - \frac{\cos 2\pi n}{2n^2} + 0 + \frac{1}{2n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\cdot 0 - \frac{\pi\cdot 0}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = 0.$$

Así, pues, todos los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 ... son nulos.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\operatorname{sen} nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} nx\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\operatorname{sen} nx\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\operatorname{sen} nx\, dx\right].$$

Aplicando a $\int x\operatorname{sen} nx\, dx$ la fórmula (5) (§146), obtendremos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right)\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos 2\pi n}{n} + \frac{\cos 0}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi\cos 2\pi n}{n} + \frac{\operatorname{sen} 2\pi n}{n^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{0\cdot\cos 0}{n} - \frac{\operatorname{sen} 0}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{n} + \frac{0}{n^2} + \frac{0}{n} - \frac{0}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{n}.$$

Así, pues,

$$b_n = \frac{1}{n},$$

de donde

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \text{ etc.}$$

La descomposición buscada será:

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots$$

La serie obtenida converge a la función $y = \frac{\pi - x}{2}$ para todos los valores de x en el intervalo desde 0 hasta 2π, excepto $x = 0$ y $x = 2\pi$, como se deduce del teorema de Dirichlet.

De este modo,

$$\frac{\pi - x}{x} = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots \text{ cuando } 0 < x < 2\pi.$$

§ 148. Series de Fourier para funciones pares e impares. La función $f(x)$ se llama *par* si al sustituir x por $-x$ no cambia el signo de la función, es decir,

$$f(-x) = f(x).$$

Por ejemplo, x^2 y $\cos x$ son funciones pares, por cuanto $(-x)^2 = x^2$ y $\cos(-x) = \cos x$.

La función $f(x)$ se denomina *impar* si al sustituir x por $-x$ cambia su signo por el contrario, o sea,

$$f(-x) = -f(x).$$

Por ejemplo, x^3 y $\operatorname{sen} x$ son funciones impares, ya que $(-x)^3 = -x^3$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

Hagamos notar que *el producto de dos funciones pares o de dos funciones impares es una función par; y el de una par por una impar, una función impar.* En efecto,

$(-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x$, es el producto de dos funciones pares,

$(-x)^3 \operatorname{sen}(-x) = x^3 \operatorname{sen} x$, es el producto de dos funciones impares y

$\cos(-x) \operatorname{sen}(-x) = -\cos x \operatorname{sen} x$, es el producto de una función par por una impar.

El gráfico de una función es simétrico con relación al eje Oy, el de una función impar lo es respecto al origen de coordenadas. La fig. 147 representa el gráfico de una función par, la fig. 148, el de una impar.

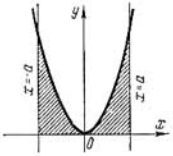


FIG. 147

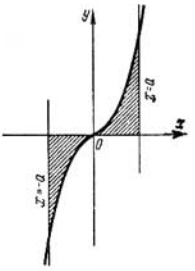


FIG. 148

Si $f(x)$ es una función par,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

si $f(x)$ es una función impar,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Estas igualdades pueden verificarse mediante consideraciones geométricas. Supongamos que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ expresa el área de una figura entre el gráfico de la función $f(x)$, las rectas $x = -a$ y $x = a$ y el eje Ox; entonces, si la función $f(x)$ es par, esta área es igual al duplo del área de la figura formada por ese mismo gráfico, el eje Ox y las rectas $x = 0$ y $x = a$ (fig. 147); si la función es impar, el área es igual a cero pues consta de dos superficies iguales de signo contrario (fig. 148).

Tomando en consideración lo dicho, se puede simplificar las fórmulas (1) (§ 143), escribiéndolas así:

para una función par

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0; \tag{1}$$

para una función impar

$$a_0 = 0 \text{ y } a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx. \tag{2}$$

Como se ve, la serie de Fourier (2) (§ 143) para una función par consta sólo de cosenos, es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

y para una función impar, sólo de senos, o sea,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\,nx.$$

EJEMPLO 1. Descomponer en una serie de Fourier la función

$$f(x) = |x| \text{ si } -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

SOLUCIÓN. La función $y = |x|$ es par (véase la fig. 79) y, por lo tanto, conforme a las fórmulas (1) se tiene:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi^2 - 0) = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx.$$

Teniendo en cuenta la igualdad (4) (§ 146), hallaremos:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi \operatorname{sen} n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{0 \cdot \cos 0}{n} + \frac{\cos 0}{n^2}\right)\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi \cdot 0}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{0}{n} - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1).$$

De aquí

$$a_1 = \frac{2}{\pi \cdot 1^2}(\cos \pi - 1) = \frac{2}{\pi}(-1 - 1) = -\frac{4}{\pi},$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi \cdot 2^2}(\cos 2\pi - 1) = \frac{2}{\pi \cdot 2^2}(1 - 1) = 0,$$

$$a_3 = \frac{2}{\pi \cdot 3^2}(\cos 3\pi - 1) = \frac{2}{\pi \cdot 3^2}(\cos \pi - 1) =$$

$$= \frac{2}{\pi \cdot 3^2}(-1 - 1) = -\frac{4}{\pi \cdot 3^2},$$

$$a_4 = \frac{2}{\pi \cdot 4^2}(\cos 4\pi - 1) = \frac{2}{\pi \cdot 4^2}(\cos 0 - 1) =$$

$$= \frac{2}{\pi \cdot 4^2}(1 - 1) = 0, \text{ etc.}$$

La descomposición buscada será:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{\pi \cdot 3^2}\cos 3x - \frac{4}{\pi \cdot 5^2}\cos 5x - \ldots =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right).$$

Aplicando el teorema de Dirichlet se puede mostrar que la serie obtenida converge a la función dada en todos los valores de x desde $-\pi$ hasta $+\pi$.

Por consiguiente, se puede anotar:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

cuando $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

EJEMPLO 2. Descomponer en una serie de Fourier la función

$$f(x) = |\operatorname{sen} x| \quad \text{cuando} \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

SOLUCIÓN. La función dada es par; aplicando la fórmula (1), obtendremos:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{4}{\pi}.$$

Suponiendo $n = 1$ en la fórmula para a_n, hallaremos:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} x \cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi - \cos 0) = -\frac{1}{2\pi}(1-1) = 0.$$

Para $n = 2, 3, 4, \ldots$, se tendrá;

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} x \cos nx\, dx.$$

Representemos el producto $2 \operatorname{sen} x \cos nx$ de la siguiente forma:

$$2 \operatorname{sen} x \cos nx = \operatorname{sen}(n+1)x - \operatorname{sen}(n-1)x^{*});$$

entonces,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\operatorname{sen}(n+1)x - \operatorname{sen}(n-1)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Big|_0^{\pi}{}^{**}) =$$

*) Esta igualdad se comprueba fácilmente aplicando a su miembro derecho la fórmula para la diferencia de los senos de dos ángulos.

**) $\int \operatorname{sen}(n+1)x\, dx$ y $\int \operatorname{sen}(n-1)x\, dx$ se hallan por la fórmula 3) (§ 108).

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \left(-\frac{\cos 0}{n+1} + \frac{\cos 0}{n-1} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \frac{2}{n^2-1} \right].$$

De aquí

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 3\pi}{3} + \frac{\cos \pi}{1} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos \pi}{3} + \frac{\cos \pi}{1} - \frac{2}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{3\pi},$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 4\pi}{4} + \frac{\cos 2\pi}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 0}{4} + \frac{\cos 0}{2} - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 0,$$

$$a_4 = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 5\pi}{5} + \frac{\cos 3\pi}{3} - \frac{2}{15} \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos \pi}{5} + \frac{\cos \pi}{3} - \frac{2}{15} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{2}{15} \right) = -\frac{4}{15\pi},$$

$$a_5 = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 6\pi}{6} + \frac{\cos 4\pi}{4} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 0}{6} + \frac{\cos 0}{4} - \frac{1}{12} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) = 0,$$

$$a_6 = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 7\pi}{7} + \frac{\cos 5\pi}{5} - \frac{2}{35} \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos \pi}{7} + \frac{\cos \pi}{5} - \frac{2}{35} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} - \frac{2}{35} \right) = -\frac{4}{35\pi}$$ y así sucesivamente. La descomposición buscada se escribirá

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\cos 2x - \frac{4}{15\pi}\cos 4x - \frac{4}{35\pi}\cos 6x - \ldots =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots \right).$$

Conforme al teorema de Dirichlet, la serie obtenida converge a la función dada en $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, por lo tanto,

$$|\operatorname{sen} x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right)$$

para todos los valores de x del intervalo indicado.

EJEMPLO 3. Descomponer en una serie de Fourier la función

$$f(x) = x \quad \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

SOLUCIÓN. La función $f(x) = x$ es impar y, por ello, se aplica la fórmula (2):

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx.$$

De acuerdo con la igualdad (5) (§ 146), hallaremos:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\operatorname{sen} n\pi}{n^2}\right) - \right.$$

$$\left. -\left(-\frac{0\cdot\cos 0}{n} + \frac{\operatorname{sen} 0}{n^2}\right)\right] = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right) = -\frac{2\cos n\pi}{n}.$$

De aquí

$$b_1 = -\frac{2\cos\pi}{1} = -2(-1) = 2,$$

$$b_2 = -\frac{2\cos 2\pi}{2} = -\frac{2\cdot 1}{2} = -1,$$

$$b_3 = -\frac{2\cos 3\pi}{3} = -\frac{2\cos\pi}{3} = \frac{2}{3},$$

$$b_4 = -\frac{2\cos 4\pi}{4} = -\frac{2\cos 0}{4} = -\frac{1}{2}, \text{ etc.}$$

La descomposición buscada será:

$$2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x + \ldots =$$

$$= 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots\right).$$

Esta serie representa la función $f(x) = x$ para todos los valores de x del intervalo desde $-\pi$ hasta $+\pi$, excepto

$x = \pm\pi$. En efecto, por el teorema de Dirichlet si $x = \pm\pi$ la suma de la serie es igual a $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$; mientras que los valores de la funcion para $x = -\pi$ y $x = \pi$ son $-\pi$ y π, respectivamente, es decir, no coinciden con la suma de la serie.

Así, pues,

$$x = 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots\right) \text{ para } -\pi < x < \pi.$$

EJEMPLO 4. Descomponer en una serie de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{si } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. La función dada es impar y, por lo tanto, aplicando la fórmula (2), obtendremos:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2n}(\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{1}{2n}(\cos n\pi - 1).$$

De aquí

$$b_1 = -\frac{1}{2\cdot 1}(\cos\pi - 1) = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1,$$

$$b_2 = -\frac{1}{2\cdot 2}(\cos 2\pi - 1) = -\frac{1}{4}(1-1) = 0,$$

$$b_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}(\cos 3\pi - 1) = -\frac{1}{6}(\cos\pi - 1) =$$

$$= -\frac{1}{6}(-1-1) = \frac{1}{3},$$

$$b_4 = -\frac{1}{2\cdot 4}(\cos 4\pi - 1) = -\frac{1}{8}(\cos 0 - 1) =$$

$$= -\frac{1}{8}(1-1) = 0, \text{ etc.}$$

La descomposición se anotará del modo siguiente:

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots$$

Cuando $x = -\pi$, $x = 0$ y $x = \pi$, la suma de la serie obtenida no coincide con los valores de la función dada, por lo tanto, esta serie converge a la función $f(x)$ en $-\pi < x < 0$ y $0 < x < \pi$.

Por consiguiente,

$$-\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots \text{ cuando } -\pi < x < 0,$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots \text{ cuando } 0 < x < \pi.$$

Descomponiendo en una serie esta función demostremos que a medida que aumenta el número de sumandos (armónicos simples), la suma parcial de la serie (armónico resultante) representa cada vez mejor la función dada.

En la fig. 149, *I* se muestra el primer armónico (sen x) de la serie.

En la fig. 149, *II* están representados los dos primeros armónicos $\left(\operatorname{sen} x \text{ y } \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}, \text{ líneas de trazos}\right)$ de la serie y su suma $\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}, \text{ línea continua}\right)$.

En la fig. 149, *III* se muestran la suma hallada de los dos primeros armónicos $\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}, \text{ líneas de trazos}\right)$ y el tercer armónico $\left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{5}, \text{ línea de trazos}\right)$, así como la suma de los tres primeros armónicos $\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5}, \text{ línea continua}\right)$.

En la fig. 149, *IV* están representados la suma de los tres primeros armónicos $\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5}, \text{ línea de trazos}\right)$, el cuarto armónico $\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7}, \text{ línea de trazos}\right)$ y la suma de los cuatro primeros armónicos $\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{7}, \text{ línea continua}\right)$.

Continuando la operación de suma de los armónicos simples, obtendremos un armónico resultante (suma parcial de la serie) que se aproxima más y más a los dos segmentos paralelos que representan la función dada.

Debido a la periodicidad de la serie de Fourier de esta función, el armonico resultante se repetirá exactamente en cada intervalo de valores de x igual a 2π.

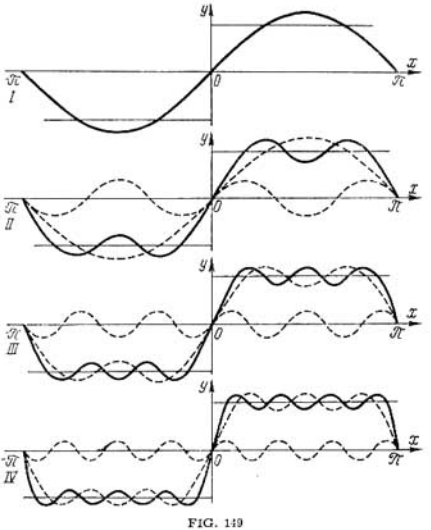


FIG. 149

Ejercicios

Descomponer en una serie de Fourier las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2$ si $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0. \\ x & \text{si } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$

Respuestas a los ejercicios

§ 2

3. (3; 0), (—5; 0), (0; 0). **4.** (0; 3), (0; —2), (0; 0). **5.** (3; —2), (—3; —2). **6.** (—4; 0), (0; 4), (2; —3), (3; 4). **7.** (5; 3), (—5; 3), (—5; —3), (5; —3), 6 (3; 5), (—3; 5), (—3; —5), (3; —5). **8.** $(4\sqrt{2}; 0)$, $(0; 4\sqrt{2})$, $(-4\sqrt{2}; 0)$, $(0; -4\sqrt{2})$.

§ 3

1. 10. **2.** 1) 10, 2) 5, 3) 5. **3.** 15. **4.** $AB = 5\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$. **5.** $AB = 5$, $AC = 8\sqrt{2}$, $BC = 13$. **8.** $A_1(-4; 0)$, $A_2(12; 0)$. **9.** 1) Sí, 2) no. **10.** $(\sqrt{3}; \pm 3)$. **11.** (—2; 4). **12.** $\left(4; 9\frac{2}{3}\right)$. **13.** (0; 14). **14.** (1; 10) y (—11; 10). **15.** (1; 1) y (5; 5).

§ 4

1. 1) (5; 7), 2) (4; —6). **2.** $AC = 3$, $BD = \sqrt{17}$, $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$. **3.** 5. **4.** (—9; 10). **5.** (11; 5). **6.** (—2; —6), (8; 2), (—6; 10). **7.** (—3; 4), (—4; —1). **8.** (4; 6). **9.** $\left(1\frac{1}{3}; -4\right)$ y $\left(5\frac{2}{3}; -1\right)$. **10.** (—8; —1). **11.** (—14; 17). **12.** (6,5; 3,5). **Indicación.** Utilizar el teorema: la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados. **13.** (8; 2). **14.** (5,5; 4,75). **Indicación.** Hallar primero el centro de gravedad de dos puntos materiales y, luego, el centro de gravedad del punto hallado y del tercero dado. **15.** (—2; 1). **16.** (1; 1). **17.** $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. **18.** (—5; —10). **19.** (—2; 1).

§ 7

1. A y C, sí; B, no. **2.** $y = 0$; $x = 7$. **3.** $y = x$ e $y = -x$. **4.** $y = 4x$. **5.** $x^2 + y^2 = 4$. **6.** $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$. **7.** $2x - 8y - 5 = 0$. **8.** $x^2 + 4y + 4 = 0$. **9.** $x^2 + y^2 = 4$.

§ 10

2. $y = -5$. **3.** $x = -2$. **4.** $y = -4$. **5.** $x = 3$. **6.** $y = 2$. **7.** $x = 5$. **8.** $y = -6$. **9.** $x = 2$. **10.** $x = 6$, $x = -6$, $y = 6$, $y = -6$. **11.** $x = 0$, $x = 8$, $y = 0$, $y = 6$ o $x = 0$, $x = 6$, $y = 0$, $y = 8$.

§ 11

1. 1) $y = x$, 2) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 3) $y = -x$, 4) $y = 0$, 5) $y = 0$. **2.** 1) La recta coincide con el eje Ox, 2) la recta divide por la mitad el primer ángulo de coordenadas, 3) la recta forma un ángulo $\alpha = 60°$ con el sentido positivo del eje Ox, 4) la recta parte por la mitad el segundo ángulo de coordenadas. **3.** $y = \frac{4}{5}x$ o $y = \frac{5}{4}x$. **4.** 1) 60°, 2) 33°42′, 3) 116°34′. **6.** A y C se hallan; B, no. **7.** En la recta $y = 2x$. **8.** $x = 4$. $y = -3$. **9.** $k = -5$. **10.** $y = -2x$. **11.** $x = 10$, $y = 0$, $y = x$ o $x = 10$, $y = 0$, $y = -x$. **12.** $y = -\sqrt{3}x$, $y = 0$ o $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$. **13.** $x = 0$, $y = 0$, $x = -6$, $y = 3$; la ecuación de la diagonal $y = -\frac{1}{2}x$. **14.** $y = -0{,}4x$. **15.** (4; 3) o (−4; −3).

§ 12

2. En la recta $y = -8x - 10$. **3.** $y = 3$. **4.** $x = -2$. **5.** 1) $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ y (0; −2), 2) (−2; 0) y (0; −6). **8.** $y = -x - 5$. **9.** 1) $y = x + 2$, 2) $y = -x - 3$, 3) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$. **10.** 1) 60°, 2) 135°, 3) 26°34′. **11.** 1) $y = 5$, 2) $x = 2$, 3) $y = 5$. **12.** $y = -2x - 1$. **13.** 1) 2, 2) 0. **14.** $y = x$ e $y = -x + 12$. **15.** $y = x + 2\sqrt{2}$, $y = -x + 2\sqrt{2}$, $y = x - 2\sqrt{2}$, $y = -x - 2\sqrt{2}$. **16.** Las ecuaciones de los lados son $y = x$, $y = -x + 8$, $y = x + 8$, $y = -x$; y las ecuaciones de las diagonales, $y = 4$, $x = 0$. **17.** $x = 0$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 8$ o $x = 0$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 8$.

§ 13

2. $4x + 5y = 0$. **3.** 5. **4.** 1) $y = 2x + \frac{10}{3}$, 2) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{15}{8}$. **5.** 1) $3x + 4y = 0$, 2) $2x - 3y - 12 = 0$. **6.** 1) $\frac{2}{3}$, 2) $-\frac{1}{2}$. **7.** 135°.

8. $2x - 3y = 0$. **9.** 1) $-\frac{2}{3}$, 2) 0. **10.** $b = 2{,}5$; $\alpha = 140°12'$. **11.** $\left(\frac{17}{8}; \frac{7}{12}\right)$.

§ 14

2. 1) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, 2) $-\frac{x}{2} - y = 1$, 3) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. **3.** 10. **4.** 1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, 2) $-\frac{x}{6} + y = 1$, 3) $\frac{x}{0{,}5} - y = 1$. **5.** 1) $4y - 6$, 2) $\frac{2}{3}$ y 2, 3) la recta no corta ningún segmento. **6.** 9. **7.** 50. **8.** $\frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1$, $-\frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1$, $-\frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 1$, $\frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 1$. **9.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$, $-\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$. **10.** $y = 0$, $4x - 3y = 0$, $y = 4$, $4x - 3y + 12 = 0$.

§ 15

1. $(6; -2)$. **2.** Pasa. **3.** $y + 9 = k(x + 6)$. **4.** 1) $\sqrt{3}x - y - 7 - 2\sqrt{3} = 0$, 2) $\sqrt{3}x + 3y + 21 - 2\sqrt{3} = 0$. **5.** $x - y + 9 = 0$; $\sqrt{3}x - 3y + 24 + \sqrt{3} = 0$; $x + y - 7 = 0$; $y = 8$. **6.** 1) $3x - y - 32 = 0$, 2) $2x + y - 18 = 0$. **7.** $x + y - 5 = 0$, $x - y + 5 = 0$. **8.** $\sqrt{3}x + y - 6\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - y + 6\sqrt{3} = 0$. **9.** 1) $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$; 2) $y = 0$, $y = -2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$.

§ 16

1. 1) $x - 3y + 5 = 0$, 2) $6x + 7y - 9 = 0$, 3) $7x + 4y - 24 = 0$, 4) $5x - 3y - 15 = 0$, 5) $x + 2 = 0$, 6) $y - 1 = 0$. **2.** $3x - y - 10 = 0$, $x - 3y + 2 = 0$, $x + 5y + 2 = 0$. **3.** 1) arc tg 3, 2) arc tg $\frac{1}{2}$. **4.** arc tg 2. **5.** 3. **6.** $(2; 0)$. **7.** 5 y 5. **8.** $x - y - 5 = 0$. **9.** $x - y - 2 = 0$. **10.** $3x + 7y + 2 = 0$. **11.** $2x + 3y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$. **12.** Sí. **13.** $y = 2x$.

§ 17

1. 1) arc tg $\frac{1}{3}$, 2) arc tg $\frac{1}{2}$, 3) arc tg 12, 4) arc tg 3. 2) arc tg 5 o arc tg (-5). **3.** 1) 0°, 2) 90°. **4.** arc tg 1,75. **5.** 1) $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$; 2) $y = 2x$, $y = \frac{1}{3}x$.

§ 18

1. 1) Sí, 2) sí, 3) no. **2.** 1,5. **3.** $2x - y - 1 = 0$. **4.** $2x - y + 3 = 0$. **5.** $2x + y - 6 = 0$. **6.** $x - 6y + 8 = 0$. **7.** $x = 2$. **8.** $4x - 5y + 15 = 0$. **9.** $4x + 3y - 20 = 0$. **10.** $2x + 3y + 1 = 0$, $3x - y - 15 = 0$, $x + 2y + 2 = 0$. **11.** $6x + 5y - 56 = 0$. **12.** $3x + y - 18 = 0$.

§ 19

1. 1) Sí, 2) no. **2.** $2x + 3y - 25 = 0$. **3.** $2x + y + 7 = 0$. **4.** $2x + 3y + 7 = 0$. **5.** $3x - 4y + 20 = 0$. **6.** $2x + y - 9 = 0$. **7.** $3x - y + 1 = 0$. **8.** $2x - y - 3 = 0$, $x + 2y - 14 = 0$. **9.** $x + 2y - 10 = 0$, $2x + 4y + 5 = 0$. **10.** 1) $2x - y + 9 = 0$, 2) $x + 2y - 8 = 0$. **11.** $3x + 4y - 7 = 0$. **12.** $y = 0$, $y = x$, $x + y - 4 = 0$ o $y = 0$, $y = -x$, $x - y - 4 = 0$. **13.** $5x - 2y - 43 = 0$, $2x + 5y + 6 = 0$. **Indicación.** Hallar el coeficiente angular de uno de los catetos utilizando la fórmula (1) (§ 17).

§ 20

1. 1) (2,5; 0), 2) $\left(0; -\frac{10}{3}\right)$. **2.** 1) (2; 1), 2) no tienen punto de intersección. **3.** Se cortan en el punto $\left(0; \frac{5}{3}\right)$. **4.** $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$; (1; 1), $\left(\frac{1}{7}; \frac{11}{7}\right)$. **5.** (3; 0). **6.** $2x - y + 1 = 0$. **7.** $x + y = 0$. **8.** $3x - 2y + 18 = 0$. **9.** $x - 7y + 11 = 0$. **10.** $5x + 2y - 9 = 0$. **11.** $2x - 3y + 1 = 0$. **12.** (1; −3), (7; −1), (9; 5), 3; 3)

Problemas mixtos

1. $\left(2\frac{2}{3}; 0\right)$ y (0; 2). **2.** El punto común es (−1; 3). **3.** $\left(3\frac{2}{3}; 4\right)$. **4.** Ecuación de la recta: $y = -2x$. **5.** $x + y + 2 = 0$. **6.** Se hallan en la recta $x - y + 2 = 0$. **7.** 5. **8.** 7. **9.** $x - y + 7 = 0$. **10.** (6; 6)

y $(-8; -8)$. **11.** 1,5 **12.** La longitud de la diagonal es 5; las ecuaciones de las diagonales, $8x + 6y - 39 = 0$, $3x - 4y + 26 = 0$. **13.** $(-3; 6)$ y $(-1; 4)$. **14.** $\sim 5{,}6$. **15.** 21 y 23. **16.** arc tg $\frac{4}{7}$, arc tg 3, arc tg $(-0{,}4)$. **17.** 45°. **18.** $3\sqrt{2}$. **19.** $3x - 5y + 30 = 0$. **20.** $x + y + 7 = 0$ o $x - y + 1 = 0$. **21.** 1) $y = 0$, $x - y + 2 = 0$, $3x + 2y - 24 = 0$; 2) $y = 0$, $x - y + 2 = 0$, $3x - 8y + 36 = 0$. **22.** $3x - y - 4 = 0$; $\sqrt{10}$. **23.** $3x + 3y + 11 = 0$. **24.** $(5; 8)$. **25.** $(1; -1)$. **26.** $(-3{,}8; -1{,}6)$. **27.** $2x + y - 14 = 0$, $(6; 2)$, $3\sqrt{5}$. **28.** $5x - y - 15 = 0$. **29.** arc tg 2,5. **30.** $(0; -2)$ y $(0; -7)$. **31.** $x - y = 0$, $x + y + 2 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. **32.** $(9; 1)$. **33.** $\sqrt{2}$. **34.** 24. **Indicación.** El área del paralelogramo se puede hallar mediante dos procedimientos: por la base y la altura (es decir, $s = ah$) y por dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (o sea, $s = ab \operatorname{sen} \alpha$). **35.** 20. **36.** 1) $y = x$, $y = 8$, $x = 14$; 2) $y = x$, $y = 8$, $x = 2$. **37.** $2x + y - 5 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$. **38.** 1) $y = 12$, $y = x + 12$, $y = -x + 28$; 2) $y = 28$, $y = -x + 28$, $y = x + 12$. **39.** $y = 0$, $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0$. **40.** $(-8; -3)$, $(1; 6)$, $(2{,}8; 2{,}4)$. **41.** $x - y - 10 = 0$, $y = -5$. **42.** $B(2{,}4; 6{,}4)$, $D(3{,}6, 5{,}6)$. **43.** 6. **44.** $4x - 3y - 80 = 0$, $y = -8$, $4x - 3y = 0$. **45.** $\left(3\frac{1}{3}, 5\frac{2}{3}\right)$. **46.** $x + y + 5 = 0$. **47.** $x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$. **Indicación.** El ángulo de incidencia del rayo es igual al ángulo de reflexión. **48.** $y = -\frac{2}{3}x + 4$. **49.** $11x + 3y = 31$, $11x - 3y = 31$. **Indicación.** Trazar desde el punto A una perpendicular al eje Ox hasta su intersección con el lado opuesto prolongado del ángulo reflejado y analizar los triángulos rectángulos obtenidos. **50.** $7x - 3y - 9 = 0$, $3x - 7y - 1 = 0$.

§ 22

1. 1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$; 3) $x^2 + (y - 5)^2 = 36$. **3.** A y B, sí; C, no. **4.** $x_1 = 0$, $x_2 = -4$. **5.** 1) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$; 2) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$. **6.** $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$. **7.** $(x - 2)^2 + y^2 = 16$. **8.** $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$. **9.** $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ y $(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 289$. **10.** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ y $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$. **11.** $x^2 + (y + 4)^2 = 16$. **12.** $(3; 4)$, $r = 5$. **14.** $5x + 2y - 7 = 0$. **15.** 6. **16.** $x + 3 = 0$. **17.** $x - y - 2 = 0$. **18.** $x + 2y + 5 = 0$. **19.** $(5; 0)$ y $(1; 0)$. **20.** $2x - y + 2 = 0$. **21.** $3x + 4y - 39 = 0$. **22.** $(7; 6)$ y $(0; -1)$. **23.** Tangente en el punto $(3; 3)$. **24.** Fuera de la circunferencia. **25.** $x + y - 4 = 0$.

§ 26

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **2.** $2a=26$, $2b=24$, $2c=10$. **3.** $2a=4\sqrt{6}$, $2b=14$, $F(0;\ \pm 5)$. **4.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$. **5.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$. **6.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **7.** $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **8.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ o $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **9.** $36x^2+20y^2=1125$. **10.** $4x^2+9y^2=144$ o $9x^2+4y^2=144$. **11.** *A* y *B*, sí; *C*, no. **12.** ± 3. **13.** $x^2+3y^2=15$. **14.** 1) $2x^2+5y^2=40$, 2) $3x^2+5y^2=120$. **15.** 4. **16.** $\frac{24\sqrt{2}}{5}$. **17.** $\left(\frac{6}{7};\ \frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$, $\left(\frac{6}{7};\ -\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$. **18.** 1) (3; 0) y (0; 2); 2) tangente en el punto $\left(\frac{3}{2};\ \sqrt{3}\right)$; 3) no existe intersección. **19.** $\sqrt{5}$. **20.** $8x^2+9y^2=72$. **21.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 33

1. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$, 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, 3) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$. **2.** $2a=6$, $2b=10$, $2c=2\sqrt{34}$. **3.** A$(\pm 12;\ 0)$, $F(\pm 13;\ 0)$. **4.** 1) $7x^2-9y^2=63$; 2) $16x^2-9y^2=-144$. **5.** 1) $F(\pm 7;\ 0)$, $2a=10$, $2b=4\sqrt{6}$, $e=1{,}4$; 2) $F(0;\ \pm 5)$, $2b=6$, $2a=8$, $e=\frac{5}{3}$. **6.** 1) $25x^2-24y^2=600$; 2) $9x^2-16y^2=1296$. **7.** $16x^2-9y^2=1296$. **8.** *A* y *B*, sí; *C*, no. **9.** $2x^2-9y^2=18$. **10.** $5x^2-8y^2=40$. **11.** 1) $x^2-y^2=36$, 2) $36x^2-36y^2=5$. **12.** $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **13.** $y=\pm\frac{3}{4}x$. **14.** $9x^2-16y^2=288$. **15.** $153x^2-425y^2=450$. **16.** $9x^2-16y^2=576$. **17.** $(6;\ \pm 3)$. **18.** Punto de tangencia $(6;\ 4)$. **19.** $\operatorname{tg}\varphi=4\sqrt{5}$. **20.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **21.** $3x^2-y^2=12$.

§ 35

1. 1) $y^2=16x$, 2) $y^2=-8x$, 3) $x^2=12y$, 4) $x^2=-20y$. **2.** 1) $\left(2\frac{1}{2};\ 0\right)$, 2) $(-3;\ 0)$, 3) $(0;\ 2)$, 4) $\left(0;\ -2\frac{1}{2}\right)$. **3.** $\left(\frac{5}{8};\ 0\right)$. **4.** 1) $x=-1$, $F(1;\ 0)$; 2) $y=2$, $F(0;\ -2)$. **5.** 1) $y^2=8x$, 2) $y^2=-12x$, 3) $x^2=-10y$, 4) $x^2=16y$. **6.** $y^2=10x$,

$F\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$. 7. 1) Sí, 2) no. **8.** 3 m. **9.** 3 m. **10.** 18 m. **11.** $y^2 = \frac{45}{4}x$. **12.** $4x + 3y - 16 = 0$. **Indicación.** Todos los rayos paralelos, después de reflejarse en un espejo parabólico, concurren en el foco de la parábola. **13.** $y^2 = x$. **14.** $x^2 = -8y$. **15.** 10. **16.** (0; 0) y (5; 5). **17.** $12x - 5y - 24 = 0$. **18.** 1) (1; 3) y $\left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}\right)$, 2) (1; 3) es el punto de tangencia, 3) no existe intersección. **19.** $4\sqrt{2}$. **20.** $x + y + 1 = 0$; 8.

§ 36

1. $x^2 + x - 2y = 0$. **Indicación.** Es más cómodo utilizar la ecuación de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$. **2.** $y^2 - 8x + 16 = 0$. **3.** $y = 2x - x^2$. **Indicación.** Establecer el sentido de la parábola y utilizar la ecuación de la forma $(x - a)^2 = \pm 2p(y - b)$. **4.** $y^2 + 14y - 6x + 49 = 0$. **5.** $y^2 - 4x - 16 = 0$. **6.** 1) $O_1(-2; -1)$, $p = 5$, hacia la izquierda; 2) $O_1(3; -5)$, $p = 2$, hacia arriba. **7.** 1) $O_1(-1; 2)$, $F(-1; 4)$, $x + 1 = 0$, $y = 0$; 2) $O_1(4; 1)$, $F(4; -1)$, $x - 4 = 0$, $y - 3 = 0$; 3) $O_1(2; -1)$, $F\left(2\frac{5}{12};\ -1\right)$, $y + 1 = 0$, $12x - 19 = 0$; 4) $O_1(2; 0)$, $F(3; 0)$, $y = 0$, $x - 1 = 0$; 5) $O_1(0; 2)$, $F(0; 1)$, $x = 0$, $y - 3 = 0$. **8.** 1) $y^2 + 4y - 6x + 7 = 0$; 2) $x^2 - 6x + 12y + 9 = 0$. **9.** 1) $y^2 - 4y + 28x + 88 = 0$; 2) $x^2 - 8x - 12y + 28 = 0$. **10.** 1) $x^2 - 8x + 14y - 5 = 0$; 2) $y^2 - 4y + 8x - 4 = 0$.

§ 37

1. 16. **2.** 9 y 21. **3.** $7x^2 + 16y^2 = 112$ o $16x^2 + 7y^2 = 112$. **4.** $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $x + 4 = 0$ e $y + 2 = 0$. **7.** arc tg (—0,4). **8.** $25x^2 + 49y^2 = 1225$. **9.** $3x^2 + 4y^2 = 48$. **10.** $x^2 + 2y^2 = 32$. **11.** $4\sqrt{2}$. **12.** $5x^2 - 4y^2 = 20$. **13.** 4,5. **14.** $\frac{2b^2}{a}$. **15.** $2p$. **16.** 7 y 23. **17.** $8\sqrt{3}$. **18.** $2\frac{1}{12}$. **19.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$. **20.** $9x^2 - 25y^2 = 225$. **21.** $20x^2 - 5y^2 = 36$. **22.** $3x^2 + 28y^2 = 75$. **23.** 10 y 15. **24.** 4,8. **25.** $3x - 4y - 2 = 0$. **26.** $y = -2x + 7$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. **27.** 10 m. **28.** $x^2 = 12y$ y $x^2 = -12y$. **29.** $9x^2 + 25y^2 = 225$ **30.** $x^2 = -\frac{16}{3}y$. **31.** 13 mm. **32.** (18; 12) y (18; —12). **33.** 4. **34.** $(3; \pm 6)$. **35.** 10. **36.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **37.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$. **38.** $e \approx 0{,}08$. **39.** $x^2 -$

$-4y^2 = 36$. **40.** arc tg $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **41.** $9x^2 - 7y^2 = 63$. **42.** $x - 2y - 3 = 0$, $x - 2y - 7 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $2x + y - 4 = 0$. **43.** $\sqrt{5}$. **44.** 4. **45.** $O_1(-3; -9)$, $F\left(-3; -8\frac{3}{4}\right)$ **46.** $y^2 = \frac{36}{5}(x + 5)$. **47.** $p = 2{,}5$.

§ 47

1. 6. **2.** 1. **3.** 0. **4.** 1. **5.** 0. **6.** 0. **7.** ∞. **8.** ∞. **9.** ∞. **10.** $\frac{1}{3}$. **11.** 0. **12.** ∞. **13.** 2. **14.** $-4a$. **15.** 5. **16.** -6. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** 27. **19.** ∞. **20.** $\frac{\sqrt{a}}{2a}$. **21.** $\frac{\sqrt{a}}{a}$. **22.** 4. **23.** $\frac{1}{4}$. **24.** 4. **25.** 0. **26.** 1. **27.** 2. **28.** $-0{,}5$. **29.** 0. **30.** ∞.

§ 49

1. 1. **2.** 0. **3.** 2. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{2}{3}$. **6.** $\frac{a}{b}$. **7.** 1. **8.** 4. **9.** $\frac{1}{8}$. **10.** ∞. **11.** 5. **12.** 1. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 1. **16.** 2. **17.** 2. **18.** 1. **19.** 1,5. **20.** 2. **21.** 0,5.

§ 51

1. 1,099. **2.** 2,485. **3.** 1,504. **4.** 2,352. **5.** $-1{,}610$. **6.** $-1{,}833$ **7.** $-0{,}174$. **8.** $-2{,}2303$.

§ 53

1. 1) 3; 2) -1; 3) -3. **2.** 1) 13; 2) 76; 3) $12a^2 + 1$; 4) $3a^2 - 6a + 4$. **5.** $f(2) = 0$, $f(-3) = 0$. **6.** 1) Todos los valores de x, excepto $x = -1$; 2) todos los valores de x, excepto $x = \pm 1$; 3) $x \geqslant 1$; 4) $x \leqslant 1$; 5) $x > 0$; 6) $-\infty < x < +\infty$. 7) $-1 \leqslant x \leqslant +1$

§ 55

1. 1) 0,6; 2) 0,4; 3) -1. **2.** 1) 1,38; 2) 0; 3) $2a^2$. **3.** 1) 2,25; 2) $-3{,}24$. **4.** 1) -6; 2) $2h^2 + 4ah - h$. **5.** $-3\frac{3}{7}$. **6.** $\sim -0{,}13$. **7.** 1) $3\Delta x$; 2) $4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$; 3) $6x\Delta x - 2\Delta x + 3(\Delta x)^2$; 4) $-2x\Delta x - 3\Delta x - (\Delta x)^2$; 5) $3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; 6) $6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 - 2(\Delta x)^2 - 4x\Delta x + 2(\Delta x)^3$; 7) $\frac{x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 + \Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

§ 57

7. $x = 1$. **8.** $x = 2$. **9.** $x = -1$. **10.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

§ 61

1. 3. **2.** 1) 12; 2) 32. **3.** 1) 5; 2) 4,1; 3) 4,01; 4) 4,001. **4.** 16. **5.** 1) 21; 2) 12 y 30.

§ 62

1. 2. **2.** 0,0075. **3.** 1) 2; 2) 6. **4.** 1,6.

§ 63

1. 4. **2.** $10x$. **3.** $8x - 2$. **4.** $-4x + 1$. **5.** $6x - 2$. **6.** $-6t^3$. **7.** $3u^2 - 1$. **8.** $\frac{4}{p^2}$. **9.** 1) 1; 2) 0; 3) -5; 4) -7.

§ 66

1. 1) 6; 2) 0. **2.** 45°. **3.** 135°. **4.** $4x - y - 6 = 0$. **5.** $5x + y + 3 = 0$, $x - 5y + 11 = 0$.

§ 77

1. 0. **2.** a. **3.** $5x^4$. **4.** px^{p-1}. **5.** $15x^2$. **6.** $-12t^3$. **7.** $6ax^2$. **8.** $2x^n$. **9.** $6x^2 - 3$. **10.** $3t^3 - t + 2$. **11.** -2. **12.** $2x^{2n} - x^{2n-1}$. **13.** $2x + 1$. **14.** $9t^2 - 4t$. **15.** 90. **16.** $3t^2 + 6t + 2$. **17.** $32u^3 + 12u^2 - 4u - 1$. **18.** $\frac{\sqrt{x}}{x}$. **19.** $-\frac{2\sqrt[4]{x^3}}{3x}$. **20.** $1{,}5\sqrt{r}$. **21.** $\frac{7}{3}u\sqrt[3]{u}$. **22.** $-\frac{4}{3p^3}$. **23.** 0,25. **24.** $-\frac{2\sqrt{x}}{3x^2}$. **25.** $\frac{1}{3}$. **26.** $-\frac{5\sqrt[3]{v}}{3v^3}$. **27.** $\frac{\sqrt[3]{x^5}}{6x^2}$. **28.** $\frac{11}{6}\sqrt[6]{x^5}$. **29.** $\frac{5\sqrt[3]{t^5}}{t}$. **30.** $\frac{7\sqrt[12]{\varphi^7}}{2\varphi}$. **31.** $2x\sqrt[3]{x}$. **32.** $\frac{3\sqrt{t}+2}{2}$. **33.** $\frac{t-2}{t^3}$. **34.** 2. **35.** $\frac{6x^2-6x+10}{(2x-1)^2}$. **36.** $\frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$. **37.** $-\frac{2}{(u+1)^2}$. **38.** $-\frac{2v}{(v^2+1)^2}$. **39.** $\frac{2x^2+2x+1}{x^2(1+x)^2}$. **40.** $\frac{3x^2-1}{x^2(1-x^2)^2}$. **41.** $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$.

42. 1) $-\frac{2}{3}$ y 2; 2) -1 y $\frac{7}{3}$. **43.** $4x+2y-3=0$, $2x-4y+1=0$. **44.** $x+2y-4=0$, $2x-y-3=0$. **45.** (1; 2). **46.** (1; 2). **47.** $y=4x-21$. **48.** $y=x$, $y=-x$. **49.** $y=10x-11$. **50.** $b=-3$, $c=4$. **51.** 23 amperios. **52.** $\frac{1}{6}$. **53.** $t=2$. **54.** 1) $t=0$ y 8; 2) $t=0$; 4; 8. **55.** $v=202$ m/s; $t\approx 30{,}6$ s. **56.** 1) $v=0{,}4$ m/s; 2) $t\approx 2{,}04$ s, 3) $S=70{,}4$ m. **57.** $181{,}5\cdot 10^3$ ergios. **58.** 1) 11; 2) 13. **59.** 1. **60.** 1) $2at-b$; 2) $\frac{b}{2a}$. **61.** 2π. **62.** $4(x+2)^3$. **63.** $9(3t-2)^2$. **64.** $10x(x^2-1)^4$. **65.** $6(x^2-2x)^2(x-1)$. **66.** $4(t^2-t+1)^3(2t-1)$.

67. $20(3u^2-u+4)^3(6u-1)$. **68.** $\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$. **69.** $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

70. $\frac{p}{\sqrt{2px}}$ o $\frac{p}{y}$. **71.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **72.** $\frac{2(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. **73.** $-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ o $-\frac{x}{y}$. **74.** $-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ o $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **75.** $\frac{1-4x}{2\sqrt{(2-x)(3+2x)}}$.

76. $\frac{p^2}{\sqrt[3]{(p^3-1)^2}}$. **77.** $\frac{x^2-2x}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2+1)^2}}$. **78.** $3(3x-1)(5x+1)(x+1)^2$.

79. $\frac{2t(5t-3)}{\sqrt{4t-3}}$. **80.** $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. **81.** $\frac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **82.** $\frac{5x^2+2x-3}{2\sqrt{x-1}}$.

83. $\frac{x^2(4x^3+3)}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$. **84.** $\frac{2(4\varphi^4-1)}{\varphi^3}$. **85.** $-\frac{60x^2}{(5x-4)^4}$. **86.** $-\frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$.

87. $\frac{2x+1}{2x\sqrt{2x}}$. **88.** $-\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}$. **89.** $\frac{x-2}{\sqrt{(x-1)^3}}$. **90.** $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

91. $\frac{x+2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **92.** $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. **93.** $-\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$. **94.** $\frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$.

95. $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$. **96.** $\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}}$.

§ 78

1. $1-\cos x$. **2.** $\cos\varphi-\varphi\operatorname{sen}\varphi$. **3.** $\frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u}$. **4.** $\cos 2t$. **5.** $4\cos e^2 2x$. **6.** $\operatorname{tg}^2\theta$. **7.** $-\operatorname{ctg}^2\varphi$. **8.** $a\operatorname{sen} t$. **9.** $\cos\theta+\cos 2\theta$. **10.** $\frac{2\operatorname{sen} t}{(1+\cos t)^2}$.

11. $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$. **12.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. **13.** $\cos^3\omega \operatorname{sen}\omega$. **14.** 10. **15.** $2\cos 2\varphi$.

16. $-\operatorname{sen} 2\omega$. **17.** $\frac{2\pi}{q}\cos\left(\frac{2\pi}{q}x\right)$. **18.** $\pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}t\right)$. **19.** $2\operatorname{sen}(1-2\varphi)$.

20. $\omega \sec^2\omega^2$. **21.** $2(2\varphi-1)\cos(\varphi^2-\varphi)$. **22.** $\frac{\cos\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}$. **23.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} t\sqrt{\cos t}$.

24. $\frac{4}{\sqrt{x}\cos^2 2\sqrt{x}}$. **25.** $\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x\sqrt{\operatorname{sen} x}$. **26.** $\frac{1}{t^2}\operatorname{sen}\frac{1}{t}$. **27.** $-\frac{a}{t^2}\cos\frac{a}{t}$.

28. $\operatorname{tg}\omega \sec^2\omega$. **29.** $\frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\cos x}}{2\cos^2 x}$. **30.** $\operatorname{sen}^2 x(3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$.

31. $4\cos t\cos 3t$. **32.** $\operatorname{sen} 4\theta$. **33.** $-\operatorname{sen}^3 x$. **34.** $\operatorname{sen}^4 x$. **35.** $\cos 2x$.

36. $\frac{1}{\cos x - 1}$. **37.** $2\operatorname{sen} 4\varphi$. **38.** $-\frac{1}{4}\operatorname{sen} x$. **39.** $\operatorname{ctg} 2\varphi\sqrt{\operatorname{sen} 2\varphi}$.

40. $-\frac{1}{x^2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}$. **41.** $\frac{2}{3}\operatorname{ctg} 2x\sqrt{\operatorname{sen} 2x}$. **42.** $\frac{4}{3}\operatorname{ctg} 2\omega\sqrt{\operatorname{sen}^2 2\omega}$.

43. $-\frac{\cos\omega}{2\cos^4\frac{\omega}{2}}$. **44.** $\sec^6 x$. **45.** 1) $-\frac{a\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}$; 2) $t=2k$, donde

k es un número entero o cero; 3) $s=a$; $-a$; a; $-a$.

§ 79

1. $1+\ln x$. **2.** $\ln t$. **3.** $\frac{1-\ln u}{u^2}$. **4.** $\frac{0{,}4343}{x}$. **5.** 0,4343.

6. $\frac{2t}{t^2-1}$. **7.** $-\frac{1}{v}$. **8.** $\operatorname{ctg}\alpha$. **9.** $\operatorname{tg} t$. **10.** $-\operatorname{tg} t$. **11.** 2.

12. $\frac{2\ln x}{x}$. **13.** $-\frac{10}{4+t}$. **14.** $\frac{2a}{a^2-x^2}$. **15.** $-\frac{a}{x(a+x)}$.

16. $\frac{1}{x\ln x}$. **17.** $\frac{8\ln x}{x}$. **18.** $\frac{2}{x(1-x^2)}$. **19.** $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{u}{3}$.

20. $3\operatorname{ctg} x\ln^2\operatorname{sen} x$. **21.** $\frac{a}{x^2}\operatorname{ctg}\frac{x-a}{x}$. **22.** $\operatorname{cosec} t$. **23.** $\frac{\ln\sqrt{x}}{x}$.

24. $\frac{\operatorname{cosec} 2x}{\sqrt{\ln\operatorname{tg} x}}$. **25.** $\operatorname{tg}^3 x$. **26.** $2\operatorname{tg}(1-t)$. **27.** $2\operatorname{tg} x$. **28.** $\operatorname{ctg} x\cos^2 x$.

29. $\frac{x}{a^2+x^2}$. 30. $\sec x$. 31. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 32. $\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}$. 33. $\frac{1}{1-x^2}$.

34. $\frac{2}{1-4x^2}$. 35. $-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$. 36. $2\cos(\ln x)$.

§ 81

1. xe^x. 2. $\frac{e^t(1+t\ln t)}{t}$. 3. e^{-x}. 4. $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. 5. $2e^{2\sqrt{t}}$.

6. $-a^{-x}\ln a$. 7. $a^{\operatorname{sen} x}\ln a\cos x$. 8. $e^{2x}(1+2x)$. 9. $-2\varphi e^{-\varphi^2}$.

10. $-\frac{1}{p^2}a^{\frac{1}{p}}\ln a$. 11. $2xe^{-2x}(1-x)$. 12. $n^x x^{n-1}(n+x\ln n)$. 13. 1.

14. 1. 15. $e^t\cos e^t$. 16. $2e^{2\operatorname{sen} t}\cos t$. 17. $e^{-t}\operatorname{sen} e^{-t}$. 18. $e^{x\ln x}(1+$

$+\ln x)$. 19. $\frac{1}{1+e^{2x}}$. 20. $e^t\operatorname{sen} 2e^t$. 21. $-\frac{1}{2}\sqrt{e^{-x}}\operatorname{sen}\sqrt{e^{-x}}$.

22. $-\frac{1}{2}e^x\operatorname{tg} e^x\sqrt{\cos e^x}$. 23. $-\operatorname{sen} t$. 24. $-\frac{e^{\sqrt{x}}\operatorname{sen} e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

25. $-\frac{2e^{-2\varphi}}{\cos^2 e^{-2\varphi}}$. 26. $\frac{2e^{\ln^2 x}\ln x}{x}$. 27. $\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\left(\cos\frac{x}{a}-\operatorname{sen}\frac{x}{a}\right)$.

28. $e^{\cos x}(\cos x-\operatorname{sen}^2 x)$. 29. $\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$. 30. $2e^{2\varphi}(\cos 2\varphi-\operatorname{sen} 2\varphi)$

o $2\sqrt{2}\,e^{2\varphi}\operatorname{sen}(45^\circ-2\varphi)$. 31. $2ae^{ax}\operatorname{sen} ax$. 32. $\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$. 33. $\frac{1}{1+e^{2x}}$.

34. $y=\frac{1}{2}x+1$. 35. $k(A-x)$.

§ 82

1. $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. 2. $-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 3. $\frac{3}{1+9x^2}$. 4. $\frac{2}{4+t^2}$.

5. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 6. $-\frac{\sqrt{v}}{2v(1+v)}$. 7. $\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}$. 8. $\frac{2\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $-\frac{6\operatorname{arc\,cos} 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$. 10. $\frac{e^{\varphi}}{1+e^{2\varphi}}$. 11. $-\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$. 12. $\frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$.

13. $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$. 14. $\frac{2e^{\operatorname{arc\,tg} 2x}}{1+4x^2}$. 15. $\frac{\sqrt{e^t}}{2\sqrt{1-e^t}}$. 16. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

17. $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. 18. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 19. $\frac{e^{\arccos t}\operatorname{tg} e^{\arccos t}}{\sqrt{1-t^2}}$.

20. $\frac{2}{(4+x^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}$. 21. $\frac{\pi}{6}$. 22. $\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}$. 23. $\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}$.

24. $\frac{1}{1-x^4}$. 25. $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. 26. $\frac{1}{1+x^2}$. 27. $-\frac{2a}{a^2+x^2}$.

28. $\frac{1}{1+x^2}$. 29. $\frac{2}{1+\varphi^2}$. 30. $x^2 \operatorname{arc\,tg} x$.

§ 83

1. $3x$. 2. $\frac{2}{y}$. 3. $\frac{3}{2y}$. 4. $\frac{1}{1-2y}$. 5. $-\frac{x}{y}$. 6. $\frac{2x}{2a-3y}$.

7. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. 8. $-\frac{y}{x}$. 9. $\frac{x-y}{x}$. 10. $-\frac{2xy+y^2}{2xy+x^2}$. 11. $\frac{a}{2(y-1)}$.

12. $-\sec y$. 13. $\frac{y}{\cos y - x}$. 14. $\frac{2}{x}$. 15. $\frac{xy-y}{x-xy}$. 16. $2x\sqrt{1-y^2}$.

§ 84

1. 0. 2. $6x$. 3. 6. 4. $-\frac{\sqrt{u}}{2u^2}$. 5. $-\frac{2}{t^3}$. 6. $12x^2-4$.

7. $-2\cos 2\alpha$. 8. $e^{\operatorname{sen} t}(\cos^2 t - \operatorname{sen} t)$. 9. $\frac{2}{(2+t)^2}$.

§ 85

1. 8. 2. -9. 3. $\sqrt{3}$. 4. -6. 5. $v=20$, $j=16$. 6. $v=0$, $j=-2$. 7. $v=\sqrt{2}$, $j=-\sqrt{2}$. 8. $v=-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$, $j=-\frac{1}{6}\pi^2$. 9. $v=5$, $j=0$. 10. $t=6$, $v=18$ 11. $v=t^2-4t+3$, $j=2t-4$, $t_1=1$ y $t_2=3$. 12. 1) $b-2ct$, $-2c$; 2) $\frac{b}{2c}$. 13. $v_3=170{,}6$ m/s., $v_{10}=102$ m/s., $j=-9{,}8$ m/s^2. 14. 1) $S=45{,}1$ m; 2) $v=30{,}2$ m/s., $j=-9{,}8$ m/s^2; 3) $t\approx 4{,}08$ s., $S=91{,}6$ m. 15. $j=ae^t+be^{-t}=S$ para

todo t. **16.** $v = -ak$, $j = ak^2$. **17.** $j = -\dfrac{kv_0^2}{(1 + kv_0 t)^2}$. **18.** a) $F =$ $= 22$m, b) $f = -2\sqrt{2}$ m, c) $F = 4$m. **19.** $F = -m\omega^2 S$. **20.** $F = 2am =$ $=$ const. **21.** $F = -4\pi^2 \nu^2 mx$. **22.** $j = -\dfrac{a}{b} e^{\frac{v}{a}}$. **Indicación.** De la ecuación dada, expresar t mediante v y sustituir el valor de t en la expresión para la aceleración.

§ 90

1. 1) Crece, 2) decrece. **2.** 1) Crece, 2) crece, 3) decrece. **3.** 1) Crece para todo x, 2) decrece para todo x. **4.** 1) Asciende, 2) asciende, 3) desciende. **5.** 1) Decrece cuando $x < \dfrac{3}{2}$, crece cuando $x > \dfrac{3}{2}$; 2) decrece cuando $x > 2$, crece cuando $x < 2$. **6.** Mín. $(1; -1)$. **7.** Máx. $(2; 4)$ **8.** Mín $\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{23}{8}\right)$. **9.** Máx. $(-0{,}2; 2{,}2)$. **10.** Máx. $(3; 2)$. **11.** Mín $(0; 0)$, **12.** Mín. $\left(1; -\dfrac{3}{2}\right)$. **13.** Mín. $(0; -5)$, máx. $\left(-3; 8\dfrac{1}{2}\right)$. **14.** Máx. $\left(-1; \dfrac{2}{3}\right)$, mín. $\left(1; -\dfrac{2}{3}\right)$. **15.** Máx. $\left(2; -\dfrac{7}{3}\right)$, mín. $\left(3; -\dfrac{5}{2}\right)$. **16.** Máx. $\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$, mín. $(3; -1)$. **17.** Máx. $\left(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{13}{27}\right)$, mín. $(1; -9)$. **18.** Máx. $\left(-\dfrac{2}{3}; 6\dfrac{17}{27}\right)$, mín. $(1; 2)$. **19.** Máx. $(-1; 9)$, mín. $(3; -23)$. **20.** Mín. $(-1; -0{,}5)$, máx. $1(; 0{,}5)$. **21.** Máx. $(-1; -12)$, mín. $(5; 24)$.

§ 93

1. 1) Convexa, 2) cóncava. **2.** 1) Convexa, 2) cóncava. **3.** 1) Cóncava en todos los puntos, 2) convexa en todos los puntos. **4.** Punto de inflexión $(0; 0)$. **5.** Punto de inflexión $(-1; 1)$. **6.** Punto de inflexión $\left(\dfrac{1}{2}; 6\dfrac{1}{2}\right)$. **7.** Punto de inflexión $(2; -4)$. **8.** No hay punto de inflexión. **9.** Puntos de inflexión $(2; 62)$ y $(4; 206)$. **10.** Puntos de inflexión $(-3; 294)$ y $(2; 114)$. **11.** No hay punto de inflexión. **12.** Puntos de inflexión

$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{5}{3}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{5}{3}\right)$. **13.** Puntos de inflexión (—0,7; 2,2), (0; 1) y (0,7; —0,2). **14.** Convexidad cuando $x < \frac{4}{3}$, concavidad cuando $x > \frac{4}{3}$. **15.** Concavidad cuando $x < -\frac{1}{2}$, convexidad cuando $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ y concavidad cuando $x > \frac{1}{2}$.

§ 94

1. Mín (0; 0). **2.** Mín. (0; —12). **3.** Mín. (3; —6). **4.** Máx. (2; 3) **5.** Máx. (2; 22), mín. (6; —10). **6.** Máx. $\left(-\frac{2}{3}; 4\frac{13}{27}\right)$, mín. (2; —3). **7.** Máx. (—3; 14,5), mín. $\left(2; -6\frac{1}{3}\right)$. **8.** Mín. $\left(1; -\frac{5}{6}\right)$, máx. (6; 20). **9.** Mín. $\left(-1; -5\frac{2}{3}\right)$, máx. (3; 5). **10.** Mín. (1; 3), máx. (2; 4), mín. (3; 3). **11.** No existe máximo ni mínimo. **12.** Crece cuando $x < -2$, decrece cuando $-2 < x < 2$, crece cuando $x > 2$. **13.** Decrece cuando $x < -1$, crece cuando $-1 < x < \frac{5}{3}$, decrece cuando $x > \frac{5}{3}$. **14.** Mín. (1; e). **15.** Mín. (2,5; 2), máx. (—2,5; —2).

§ 95

1. 6 y 6. **2.** 5 y 5. **3.** 4 y 4. **4.** 0,5. **5.** El cuadrado. **6.** 100 × × 100 m². **7.** 5 cm. **8.** 5 × 5 cm². **9.** 10 × 10 cm². **10.** $\sim$ 0,7 m. **11.** $\sim$ 0,63 m. **12.** 3 × 6 × 4 dm³. **13.** 2 dm. **14.** 2 × 2 × 1 m³. **15.** $2R = H = 3\sqrt[3]{4}$ cm. **16.** $R = H = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\pi^2}$ dm. **17.** 4 cm. **18.** 10 cm. **19.** 7,5 cm. **20.** $\frac{20}{3}\sqrt{3}$ cm. **21.** $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$. **22.** 5 cm. **23.** (2; $\pm$ 2). **24.** $\sim$ 0,71 m. **25.** 2,4 m. **26.** $v_{\text{máx.}} = 64$ m/s. **27.** $S = \frac{v_0^2}{2g}$. **28** $R = r$. **29.** La anchura de la viga es de $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ cm, y su altura, $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ cm. **30.** $\frac{d\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. **31.** $M_{\text{máx.}} = \frac{ql^2}{8}$.

§ 97

5. Del mismo orden. **6.** a) $1-\cos x$, de orden superior, b) del mismo orden, c) del mismo orden, d) equivalentes, e) $1-\cos 2x$, de orden superior. **7.** a) Del mismo orden, b) del mismo orden, c) sen x, de orden inferior, d) equivalentes, e) $\cos^2 x$, de orden superior. **8. Indicación.** Utilizar la fórmula $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

§ 100

1. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x}\,dx$. **2.** $-\dfrac{2dt}{(1+t)^2}$. **3.** $\dfrac{1}{\omega^2}\operatorname{sen}\dfrac{2}{\omega}\,d\omega$. **4.** $\dfrac{\operatorname{sen} 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$. **5.** $-\dfrac{2}{t}\ln\dfrac{1}{t}\,dt$. **6.** $-\dfrac{dx}{2x}$. **7.** $\dfrac{dx}{1+2x-2x^2}$. **8.** 0,4. **9.** $\sim 0{,}008$. **10.** $\sim 0{,}1$ cm^2. **11.** $\sim 10\pi$ cm^2. **12.** $\sim 0{,}3$ m^3. **13.** ~ 8 cm^3. **14.** $\sim 8\pi$ cm^3. **15.** $\sim 0{,}1$ cm. **16.** $\sim 0{,}2$ cm. **17.** $\sim 0{,}08\%$. **18.** $\sim 2\%$. **19.** $\sim 2\%$. **20.** $\sim 12{,}07$. **21.** $\sim 15{,}42$. **22.** $\sim 8{,}14$. **23.** $\sim -16{,}3$. **24.** $\sim 0{,}96$. **25.** $\sim -23{,}84$. **26.** $\sim 0{,}814$.

§ 103

1. $\sqrt{2}$. **2.** 0,5. **3.** $2\sqrt{2}$. **4.** $\dfrac{20}{3}\sqrt{10}$. **5.** $3\sqrt{6}$. **6.** $2\sqrt{2}$. **7.** $-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. **8.** ∞. **9.** $(0;\ 0)$.

§ 106

1. $\dfrac{1}{2}x^2+C$. **2.** $\dfrac{1}{5}x^5+C$. **3.** $\dfrac{1}{n}x^n+C$. **4.** $5x+C$. **5.** $a\varphi+C$. **6.** x^2+C. **7.** $\dfrac{1}{6}t^3+C$. **8.** $2x-\dfrac{1}{2}x^2+C$. **9.** $\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3+C$. **10.** $a\varphi+\dfrac{1}{3}\varphi^3+C$. **11.** $\dfrac{3}{2}x^2-6x+C$. **12.** x^4+2x^2-3x+C. **13.** $\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^4+C$. **14.** $\dfrac{1}{3}x^3+3x^2+9x+C$. **15.** $\dfrac{16}{3}x^3-8x^2+4x+C$. **16.** $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **17.** $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

18. $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$. **19.** $-\frac{1}{\omega}+C$. **20.** $2\sqrt{u}+C$. **21.** $3\sqrt[3]{x}+C$.

22. $\sqrt[3]{x^3}+C$. **23.** $\frac{1}{3}x\sqrt{x}+C$. **24.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}+C$. **25.** $\frac{4}{7}x\sqrt[3]{x^3}+C$.

26. $\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}-8\sqrt{x}-\frac{2}{x}+C$. **27.** $-\frac{3\sqrt[3]{x}}{x}-3x+C$. **28.** $\frac{2}{3}v\sqrt{v}-$

$-\frac{6}{7}v\sqrt[3]{v}+C$. **29.** $-4\cos x+C$. **30.** $2a\operatorname{sen}\varphi+C$. **31.** $2\operatorname{tg}\theta+C$.

32. $-3a\operatorname{ctg}u+C$. **33.** $t+\operatorname{sen}t+C$. **34.** $2x+3\cos x+C$.

35. $x^3-2\operatorname{sen}x+C$. **36.** $2\operatorname{tg}\varphi+3\operatorname{ctg}\varphi+C$. **37.** $3e^u+C$.

38. $\frac{2a^\varphi}{\ln a}+C$. **39.** $\frac{1}{2}x^2-5e^x+C$. **40.** $2e^t-3\operatorname{sen}t+C$. **41.** $\frac{3}{2}\ln|t|+C$.

42. $2\ln|x|-\frac{1}{2}x^2+C$. **43.** $6\operatorname{arc\,tg}x+C$. **44.** $\frac{3}{4}\operatorname{arc\,sen}x+C$.

45. $2v+\operatorname{tg}v+C$. **46.** $t+2\operatorname{ctg}t+C$. **47.** $e^x-\cos x+C$. **48.** $\operatorname{tg}x+C$.

49. $\operatorname{tg}x-x+C$. **50.** $v-\operatorname{arc\,tg}x+C$. **Indicación.** Representar x^2dx en la forma $(x^2+1-1)\,dx$.

§ 107

1. $\frac{1}{2}x^2-3x+13$. **2.** $\operatorname{sen}x-\cos x+1$. **3.** $2\ln|x|-x+3$.

4. $\frac{1}{2}e^x-\operatorname{sen}x$. **5.** $5\operatorname{arc\,tg}x+x$. **6.** $y=\frac{1}{2}x^2-1$. **7.** $y=$

$=\ln|x|+1$. **8.** $S=2t^3+t+3$. **9.** $S=\frac{1}{3}t^3-3t^2+7t+4$.

10. $S=4\operatorname{sen}t+6$. **11.** $S=0{,}6\,t^2$. **12.** $S=\frac{2}{3}t^3$.

§ 108

1. $\frac{1}{25}(3+5x)^5+C$. **2.** $\frac{1}{b(m+1)}(a+bx)^{m+1}+C$. **3.** $-\frac{1}{3(3x+1)}+C$.

4. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}+C$. **5.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(4x-3)^4}+C$. **6.** $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^5}+C$.

7. $\frac{4}{3}\sqrt[3]{(3x+5)^3}+C$. **8.** $\sqrt{3x-2}+C$. **9.** $\frac{1}{2}\ln|1+2x|+C$.

10. $-\frac{1}{2}\ln|3-4x|+C$. **11.** $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **12.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x+C$.

13. $\cos(1-t)+C$. **14.** $2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\varphi+2\right)+C$. **15.** $3\operatorname{sen}\frac{x}{3}+$
$+\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **16.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x+C$. **17.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x+C$.

18. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x-1)+C$. **19.** $\frac{1}{2}e^{2z}+C$. **20.** $-\frac{1}{3}e^{-3\theta}+C$.

21. $-4\varepsilon^{-\frac{1}{2}\omega+1}+C$. **22.** $-\frac{1}{2e^x}+C$. **23.** $x-e^{-x}+C$.

24. $-\frac{1}{\ln 3}3^{-t+2}+C$. **25.** $\ln(1+x^2)+C$. **26.** $\frac{2}{2(1-2t^2)}+C$.

27. $\frac{1}{3(2-v^3)^3}+C$. **28.** $-\sqrt{1-t^2}+C$. **29.** $\frac{1}{3}\sqrt{2x^3-1}+C$.

30. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. **31.** $\frac{1}{9}\sqrt{(1+2t^3)^3}+C$. **32.** $\ln(1+\operatorname{sen} x)+C$.

33. $\frac{1}{3}\ln|2-3\cos\varphi|+C$. **34.** $\frac{1}{\cos t}+C$. **35.** $-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3\omega}+C$.

36. $\frac{1}{2-\operatorname{sen} x}+C$. **37.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+\operatorname{sen} t)^2}+C$. **38.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha+C$, o
$-\frac{1}{2}\cos^2\alpha+C$, o $-\frac{1}{4}\cos 2\alpha+C$. **39.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4\varphi+C$. **40.** $-\frac{2}{3}\times$
$\times\cos\theta\sqrt{\cos\theta}+C$. **41.** $\frac{1}{3}(1+\operatorname{sen}\alpha)^3+C$. **42.** $-\frac{1}{9}\cos 3x^3+C$.

43. $-e^{\cos x}+C$. **44.** $\ln|\operatorname{sen} x|+C$. **45.** $\ln(1+e^x)+C$.

46. $-\frac{2}{2+e^x}+C$. **47.** $\frac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3}+C$. **48.** $2\sqrt{2+e^u}+C$.

49. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$. **50.** $\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{sen} 2x)+C$. **51.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+C$.

52. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C$. **53.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C$. **54.** $\frac{\sqrt{5}}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{\sqrt{5}}+C$.

55. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} 2t+C$. **56.** $\operatorname{arc\,sen}\frac{\alpha}{3}+C$. **57.** $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{2u}{3}+C$.

58. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{2\theta}{\sqrt{3}}+C$. **59.** $\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\varphi}+C$. **60.** $\ln|x^2-3x|+C$.

61. $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}x)+C$. **62.** $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$. **63.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+$ $+\operatorname{arc\,tg}x+C$. **64.** $3\operatorname{arc\,sen}x-2\sqrt{1-x^2}+C$. **65.** $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

66. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$. **67.** $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$. **Indicación.** Sustituir: $\operatorname{sen}^3 x=\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}^2 x=\operatorname{sen}x\,(1-\cos^2 x)$. **68.** $2(\sqrt{x}+1)-2\ln(\sqrt{x}+$ $+1)+C$. **Indicación.** $1+\sqrt{x}=z$. Demostrar que la respuesta se puede presentar en la forma: $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C_1$. **69.** $x-\ln|1+$ $+x|+C$. **Indicación.** Representar $x\,dx$ en la forma: $(x+1-1)\,dx$.

70. $2(\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})+C$. **Indicación.** $\sqrt{x}=z$. **71.** $2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}+C$.

Indicación. Sustituir: $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$. **72.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

§ 110

1. 1,5. 2. 9 3. $\frac{15}{64}$. 4. 2. 5. 2. 6. $2\frac{2}{3}$. 7. 3,25.

8. $\frac{20}{3}\pi$. 9. $-\frac{a^3}{6}$. 10. $\frac{1}{6}$. 11. $\frac{3}{8}$. 12. $4\frac{2}{3}$. 13. 45.

14. $3(\sqrt{2}-1)$. 15. $21\frac{1}{3}$. 16. 47. 17. $\sim 0{,}277$. 18. $\sim 2{,}14$.

19. $-3{,}69$. 20. $6\frac{2}{3}$. 21. 0,8. 22. 4. 23. $\sim 0{,}114$. 24. 1.

25. 2. 26. 2. 27. 2. 28. $1\frac{1}{3}$. 29. 0,75. 30. 2. 31. $\sim 3{,}96$.

32. $\sim -0{,}68$. 33. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. 34. $e^{\pi}-1$. 35. $\sim -0{,}31$. 36. $\frac{\pi}{3}$.

37. $\frac{\pi}{4}$. 38. $\frac{\pi}{24}$.

§ 111

1. $\frac{2}{3}$. 2. $\frac{2}{3}$. 3. 20. 4. 0,24. 5. $2(\sqrt{2}-1)$. 6. 3. 7. 3. 8. 0,25. 9. $\frac{T}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}$. 10. 0,5. 11. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$. 12. $\sim 0{,}16$. 13. $\sim 0{,}46$. 14. 0,5. 15. 2. 16. $\sim 0{,}27$. 17. $\frac{1}{9}$. 18. $\sim 1{,}1$. 19. 2. 20. 0,4. 21. $8\frac{2}{3}$. 22. $10\frac{1}{8}$. 23. 0,5. 24. $\sim 0{,}29$. 25. 0,5. 26. $2\frac{1}{3}$. 27. $e-\sqrt{e}$. 28. $\frac{5}{16}$. 29. $\frac{1}{3}$. 30. $\ln\frac{e+5}{6}$. 31. $\sim 0{,}39$. 32. $\sim 0{,}78$. 33. $\sim 0{,}45$. 34. $\sim 1{,}05$. 35. $\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{a}}{a}$. 36. $18\frac{2}{15}$. 37. $\frac{2}{3}$. 38. $\operatorname{arc\,tg} e-\frac{\pi}{4}$. 39. $\sim 0{,}39$. **Indicación.** Sustitución $x^2=z$. 40. $\frac{1}{2}\pi R^2$. **Indicación.** Véase la solución del ejemplo 12 (§ 108).

§ 114

1. 10. 2. 15. 3. $37\frac{1}{3}$. 4. 104. 5. 18. 6. 1. 7. 19,5. 8. 32. 9. 1) $\frac{4}{3}$; 2) 36; 3) 4,5. 10. 4. 11. 3. 12. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 18; 3) 13,5; 4) 2. 13. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; 3) 8; 4) $\sim 7{,}61$.

§ 116

1. 9π. 2. $\frac{1}{6}\pi$. 3. $\frac{52}{3}\pi$ cm³. 4. $\frac{50}{3}\pi$ cm³. 5. 138π cm³. 6. $\frac{4}{3}\pi ab^2$. 7. $22\,500\pi$ cm³. 8. $\frac{1}{2}\pi^2$. 9. 1) $\frac{16}{15}\pi$; 2) $\frac{512}{15}\pi$. 10. $\frac{64}{15}\pi$.

§ 118

1. 490 m. 2. $S = \frac{1}{2} gt^2$. 3. 1 m. 4. 9 cm. 5. 900 m. 6. $t = 5$ s, $S = 150$ m. 7. 9 cm. 8. 19,6 m. 9 — 20,4 m.

§ 119

1. 0,24 kgm. 2. 0,08 kgm. 3. 0,25 kgm. 4. 0,09 kgm. 5. 0,54 kgm. 6. 62,5 kgm. 7. 4 cm. 8. 4 kgm. 9. $\frac{k}{2l}(l_1 - l)^2$. 10. 67,5 kgm. 11. 400 erg. 12. $\sim$ 3406 kgm. 13. $\sim$ 1,24 m^3. 14. $\sim$ 2487 kgm. 15. $\sim$ 946 kgm. 16. $2ha^2$, donde k es el coeficiente de resistencia. **Indicación.** La fuerza de resistencia del medio $F = kv^2$; antes de integrar es necesario expresar la velocidad v mediante S.

§ 120

1. 72 kgm. 2. $\sim$ 48,1 kgm. 3. $\sim$ 45 216 kgm. 4. $\sim$ 213 500 kgm. 5. 1600 kgm. 6. $\sim$ 65,4 kgm. 7. — 753,6 kgm. 8. 12 750 π kgm. 9. 110 000 kgm. **Indicación.** Hallar por separado el trabajo de elevación de la soga y de la jaula. 10. 20.250π kgm. 11. $\sim$ 21 kgm. **Indicación.** Utilizar la ecuación de la parábola de la forma $y = Ax^2$.

§ 121

1. 12 kgf. 2. 625 kgf. 3. 18 tf. 4. 528 kgf. 5. 1) 57,6 gf. 2) 105,6 gf. 6) 1) 1,5 gf, 2) 2,25 gf. 8. $\sim$ 1,37 kgf. 9. $\sim$ 9,6 kgf. 10. 2,25 kgf. 11. 18 tf. 12. 22,2 tf. 13. 2185 kgf. 14. — 17,7 cm.

§ 123

1. $s = 2t^2 - 3t$. 2. $x = \frac{2}{3} t^3 - 5t + \frac{1}{3}$. 3. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. 4. $y = \sqrt{x^2 - 3}$. 5. $y = \frac{1}{3}\sqrt{3 - 2x^3}$. 6. $s^2 - 2t + t^2 = 0$. 7. $y = \sqrt{2x}$. 8. $y = \sqrt{4 - 2x^2}$. 9. $s = 2t^2$. 10. $y = \frac{x}{1 - 4x}$. 11. $y = \frac{x\sqrt{6}}{\sqrt{6 + x^2}}$. 12. $y = \frac{3x + x^3}{6}$. 13. $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$. 14. $y = \sqrt{\frac{x}{1 + 2x}}$. 15. $x = (1 + t)^2$. 16. $y = x$. 17. $2\sqrt{y} -$

$-2\sqrt{x}+x=2$. 18. $y=3e^{2x}$. 19. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$. 20. $y=e^{\frac{x}{2}}$.

21. $3(y+1)=\sqrt{2x-1}$. 22. $y=\operatorname{sen} x-1$. 23. $y=4\sqrt{1-x^2}$.

24. $y=\cos x$. 25. $y=x$ e $y=2\pi-x$. 26. $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1$.

27. $(x^2-1)(y^2+1)=C$. 28. $y^2=C(1-x^2)-1$. 29. $y=C\sqrt{1+x^2}-1$.

30. $xy=Ce^y$. 31. $y=Ce^{\frac{1}{x}}+1$. 32. $y=Cx^2e^{2x}$. 33. $y=Ce^{\operatorname{arc\,tg} x}$.

34. $y=Cx^2e^{-\frac{3}{x}}$. 35. $x=-\dfrac{1}{3}t^3+t^2+10$. 36. $y=2x+2$.

37. $y=x^2-x-5$. 38. $y^2=4x$. 39. $y=e^x$. 40. $y=xe^x$. 41. 39.

42. $S=v_0t+\dfrac{1}{2}gt^2$. 43. ~ 82 min. 44. ~ 60 min. 45. $\sim 16{,}6°$.

46. 27°. 47. — 24 rpm. **Indicación.** Si ω es la velocidad angular de rotación del disco, $\dfrac{d\omega}{dt}$ expresa el retardo de la rotación ocasionado por el rozamiento. De acuerdo con los datos $\dfrac{d\omega}{dt}=k\omega$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. 48. $\dfrac{8}{9}$ rps. 49. $\sim 6{,}3$ min. 50. $\sim 2{,}49$ g.

51. $\dfrac{8}{9}g$.

§ 124

1. $y=\dfrac{C-x^2}{2x}$. 2. $e^{\frac{x}{y}}=Cx$. 3. $y^2=x^2\ln(Cx)^2$. 4. $y^3=$

$=3x^3\ln|Cx|$. 5. $y^2+x^2\ln|Cx|=0$. 6. $\ln(x^2+y^2)-2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}=C$.

7. $y=Ce^{-\frac{x}{y}}$. 8. $y=x-\dfrac{x}{\ln|Cx|}$. 9. $y^2=|Cx|\,e^{-\frac{y}{x}}$.

10. $2Cy-C^2x^2+1=0$.

Indicación. Para resolver el ejemplo hay que conocer el valor de la $\int\dfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$, y para hallarlo se puede utilizar el ejemplo No 31 (§ 79).

11. $2x-y=2\sqrt{x}$. 12. $xe^{\frac{x-y}{y}}$. 13. $y=2e^{\frac{x-y}{x}}$.

§ 125

1. $y = x^2 + Cx$. 2. $y = x \ln \left| \frac{C}{x} \right|$. 3. $y = \frac{1}{6} x^4 + \frac{C}{x^2}$.

4. $y = (x + C) e^{-x}$. 5. $y = x^n (e^x + C)$. 6. $y = \frac{C - e^{-x}}{x}$. 7. $s =$

$= \operatorname{sen} t + C \cos t$. 8. $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$. 9. $y = \frac{1}{x} (C - \cos x)$. 10. $y =$

$= Cx - 1$. 11. $y = \frac{1}{2} (x + 1)^4 + \frac{1}{2} C (x + 1)^2$. 12. $y = \frac{1}{x} + Cx^2$.

13. $y = (1 + x^2)(x + C)$. 14. $y = e^x \left(\ln |x| + \frac{x^2}{2} + C \right)$. 15. $y =$

$= (x + C) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Indicación. Para resolver el ejemplo hay que conocer el valor de la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$; con este proposito se puede emplear el ejemplo No 22 (§ 79). 16. $xy = 3(x - 1)$. 17. $y = \frac{3 - e^{2x}}{2}$. 18. $y = x^2 (e^x - e)$.

19. $y = \frac{x}{\cos x}$. 20. $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1$.

§ 126

1. $y = 1 - x$. 2. $y = \frac{5}{2} x^2 - 12x + 19$. 3. $y = \frac{1}{6} x^3 +$

$+ \frac{5}{6} x - 1$. 4. $s = \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{2} t^2 - \frac{11}{6} t + 2$. 5. $\theta = \frac{1}{12} \omega^4 +$

$+ \frac{3}{4} \omega$. 6. $y = -2 \ln x + Cx + C_1$. 7. $\theta = e^{\varphi} + C\varphi + C_1$. 8. $y =$

$= -\cos x + Cx + C_1$. 9. $s = \frac{1}{2} t^2 + \operatorname{sen} t + Ct + C_1$. 10. $y =$

$= \frac{1}{2} e^{-x} + Cx + C_1$. 11. $S = \frac{1}{4} e^{2t} + C_1 t + C_2$. 12. $S = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$.

Indicación. Un cuerpo lanzado hacia arriba en sentido vertical se desplaza por la acción de la fuerza de la gravedad con una aceleración constante igual a $-g$.

13. $S = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{7}{6}t + \frac{31}{12}$. **14.** 1) $v = 3t^2 - 4t + 4$, $S = t^3 - 2t^2 + 4t$; 2) $S = 21$, $v = 19$, $j = 14$; 3) $t = \frac{2}{3}$. **15.** $S = \frac{1}{3}t^3$. **16.** $S = t^4 + 1$.

§ 127

3. $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. **4.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$. **5.** $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. **6.** $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. **7.** $y = C_1e^x + C_2xe^x$. **8.** $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$. **9.** $y = e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}(C_1 + C_2x)$. **10.** $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$. **11.** $y = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x)$. **12.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. **13.** $y = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x$. **14.** $y = 2e^{3x}$. **15.** $y = e^{-x} - 2e^{-2x}$. **16.** $y = e^{-3x}(2 + 7x)$. **17.** $S = e^{-t}(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$. **18.** $y = e^x(\cos x + 2 \operatorname{sen} x)$. **19.** $S = 2e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen} t$.

§ 130

1. Converge. **2.** Converge. **3.** Converge. **4.** Diverge. **5.** Diverge. **6.** Converge. **7.** Converge. **8.** Converge. **Indicación.** Demostrar que si $n \geqslant 3$ se verifica la inecuación $n\sqrt{n} > 2^n$, es decir, $\frac{1}{n\sqrt{n}} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Después, aplicar el criterio de comparación. **9.** Diverge. **10.** Converge. **11.** Converge. **Indicación.** Demostrar la inecuación $n(n+1) > 2^n$. **12.** Diverge.

§ 131

1. Converge. **2.** Converge. **3.** Diverge.

§ 132

1. Absolutamente convergente. **2.** No absolutamente convergente.

§ 134

1. Converge cuando $-1 < x < 1$. **1.** Converge cuando $-1 \leqslant x < 1$. **3.** Converge en $-\infty < x < +\infty$. **4.** Converge cuando $-\infty < x < +\infty$. **5.** Converge cuando $-1 < x < 1$.

§ 148

1. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \cdots\right)$
$(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$.

2. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) +$
$+ \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots$ $(-\pi < x < \pi)$.

A NUESTROS LECTORES

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

ESTIMADOS LECTORES

La editorial „Mir"
en el transcurso del año 1977
publica los siguientes libros
traducidos al español:

Problemas de análisis matemático

de G. Berman

Esta colección de problemas está dedicada a los estudiantes que cursan análisis matemático en centros de enseñanza técnica superior.

No contiene la teoría ni las fórmulas necesarias, el lector las encontrará en los capítulos respectivos del manual de análisis matemático. La mayoría de los problemas está subdividida en grupos, lo que facilita el trabajo con este libro. A los grupos de problemas de contenido homogéneo precede una indicación general. Todos los problemas de contenido físico van acompañados de las nociones necesarias sobre la física.

El libro contiene un apéndice: Tablas de las magnitudes de algunas funciones elementales.

El autor analiza un total de 4 465 problemas. Estos „Problemas" están destinados a los estudiantes de centros de enseñanza técnica superior.

Tables de funciones trigonométricas
con cinco cifras decimales

de L. Jrenov

El contenido fundamental de la tabla lo forman los valores naturales de 6 funciones trigonométricas con cinco cifras decimales, lo que garantiza prácticamente una exactitud relativa igual para todas las funciones. Estas tablas se utilizan para los cálculos más diversos en astronomía, geodesia, geofísica, cartografía, hidrografía, agrimensura de minas y topografía. Son indispensables también para quienes trabajan como ingenieros técnicos en construcción y diseño. Se recomienda en calidad de material didáctico para los cursos de cálculos matemáticos prácticos.

Las tablas son de gran utilidad para el trabajo con máquinas calculadoras más diversas, desde los aritmómetros de reclado o palancas hasta los automáticos o semiautomáticos.